Eksamen 2018: Oppgave 2

(a) $A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{v}_1$ med egenverdi $\lambda_1 = 1$.

$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v}_2$ med egenverdi $\lambda_1 = 1$

Kan regne ut $\det(A - 2I) = 0$. Løser heller $(A-2I)\vec{x} = \vec{0}$.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Generell løsning oppfyller $x_1 + x_3 = 0$ og $x_1 + x_2 = 0$. Velger

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siden $A\vec{v}_3 = 2\vec{v}_3$, så er $\lambda = 2$ en egenverdi.

(b) A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har tre lineært uavhengige egenvektorer. Fra (a) har vi

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ og $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_3 = 2$ og $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Siden $\vec{v}_1 \neq c\vec{v}_2$ er $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ lineært uavhengige. Ved Teorem 5.2 fra Forelesning 7 er $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ lineært uavhengig. Altså er A diagonaliserbar. La

$$P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3] \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da er $A = PDP^{-1}$. Følgelig er

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

opp til

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1}.$$

Altså er A^{10} similær med D^{10}. Det betyr at A^{10} og D^{10} har de samme egenverdiene. Siden

$$D^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix}$$

så egenverdiene til A^{10} er 1 og $2^{10} = 1024$.

(c) 1 Har $A = PDP^{-1}$, for

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2 Setter $\vec{y}(t) = P^{-1}\vec{x}(t)$ og løser

$\vec{y}'(t) = D\vec{y}(t)$.

Løsningen er $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$.

3 Regner ut $\vec{x}(t) = P\vec{y}(t)$.

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(c_1+c_2)e^t - c_3 e^{2t} \\ c_1 e^t + c_3 e^{2t} \\ c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

For å oppfylle $\vec{x}(0) = (1, -1, 1)$ må vi ha

$$P\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La oss ta en titt på Matlab-vedlegget. Løsningen er $c_1 = -2$, $c_2 = 0$ og $c_3 = 1$. Altså

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} \\ -2e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$