7.1 Diagonalisering av symmetriske matriser

Vi skal bevise den vanskelige delen av spektralteoremet:

$$A \text{ symmetrisk} \implies A \text{ ortogonalt diagonaliserbar}$$

Lemma 1. (Oppgave 7.1.33)
Hvis A er symmetrisk, så er

$$\vec{x} \cdot A\vec{y} = A\vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Bevis. Vi bruker $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$. Da blir

$$A\vec{x} \cdot \vec{y} = (A\vec{x})^T \vec{y} = \vec{x}^T A^T \vec{y} = \vec{x}^T A \vec{y} = \vec{x} \cdot A\vec{y}. \quad \square$$

Lemma 2.
Anta at A er symmetrisk og at $\vec{v}$ er en egenvektor til A.
Hvis $\vec{v} \cdot \vec{x} = 0$, så er også $\vec{v} \cdot A\vec{x} = 0$.

Bevis. Vi vet at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Da blir

$$\vec{v} \cdot A\vec{x} = A\vec{v} \cdot \vec{x} = \lambda\vec{v} \cdot \vec{x} = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot 0 = 0. \quad \square$$

De to neste resultatene er fra MAT1110.

Lemma 3 (Lagrange-multiplikatorer)
La F og G være kontinuerlig partiellderiverbare funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$. Enhver $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ som løser ekstremalverdiproblemet

$$\begin{cases} \text{maksimere} & F(\vec{\alpha}) \\ \text{gitt at} & G(\vec{\alpha}) = 0 \end{cases}$$

oppfyller ligningen $\nabla F(\vec{\alpha}) = \lambda \nabla G(\vec{\alpha})$.

Lemma 4 (Produktregel for prikkproduktet)
La $\vec{x}(t)$ og $\vec{y}(t)$ være deriverbare vektorvaluerte funksjoner.
Da er

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{x}(t) \cdot \vec{y}(t)\right) = \left(\frac{d}{dt}\vec{x}(t)\right) \cdot \vec{y}(t) + \vec{x}(t) \cdot \left(\frac{d}{dt}\vec{y}(t)\right).$$

Bevis for spektralteoremet.
La A være en symmetrisk $n \times n$ matrise.

Steg 1.
La $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.
For hver $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, så skriver vi

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$$
$$A\vec{x} = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_n\vec{u}_n$$

og da er $\beta_j = \vec{u}_j \cdot A\vec{x}$ fordi B er ortonormal.

Steg 2
Definer

$$F(\vec{\alpha}) = \vec{x} \cdot A\vec{x}$$
$$G(\vec{\alpha}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - 1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 - 1.$$

Vi vil finne $\vec{\alpha}$ som løser ekstremalproblemet

$$\begin{cases} \text{maksimere} & F(\vec{\alpha}), \\ \text{gitt at} & G(\vec{\alpha}) = 0. \end{cases}$$

Ved Lemma 3 vet vi at $\nabla F(\vec{\alpha}) = \lambda \nabla G(\vec{\alpha})$.

Steg 3.
Vi trenger de partiellderiverte til F og G. Siden

$$G(\vec{\alpha}) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 - 1$$

så er

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_j}(\vec{\alpha}) = 2\alpha_j.$$

Siden

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$$

så er

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha_j}(\vec{\alpha}) = \vec{u}_j.$$

Altså blir

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\vec{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(\vec{x} \cdot A\vec{x}) &\overset{\text{Lemma 4}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha_j} \cdot A\vec{x} + \vec{x} \cdot A\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha_j} \\ &= \vec{u}_j \cdot A\vec{x} + \vec{x} \cdot A\vec{u}_j \\ \text{Lemma 1} \longrightarrow &= 2\vec{u}_j \cdot A\vec{x} \\ &= 2\beta_j. \end{aligned}$$

Steg 4.
Ligningen $\nabla F(\vec{\alpha}) = \lambda \nabla G(\vec{\alpha})$ blir altså

$$2\beta_j = \lambda \cdot 2\alpha_j$$

for $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Da blir $\beta_j = \lambda\alpha_j$, så $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Så $\vec{\alpha}$ som løser ekstremalproblemet gir oss en egenvektor $\vec{v}_1 = \vec{x}$ (med egenverdi λ).

Steg 5.
La $V_1 = (\text{span}\{\vec{v}_1\})^\perp$. Altså: $\vec{x} \in V_1 \iff \vec{x} \cdot \vec{v}_1 = 0$.

Hvis $\vec{x} \in V_1$, så er

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{x} = 0 \underset{\text{Lemma 2}}{\Longrightarrow} \vec{v}_1 \cdot A\vec{x} = 0 \Rightarrow A\vec{x} \in V_1.$$

La $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n-1}\}$ være en ortonormal basis for V_1.
Vi kan gjenta Steg 1 – Steg 4 og finne en løsning av ekstremalproblemet

$$\begin{cases} \text{maksimer} & F(\vec{\alpha}). \\ \text{gitt at} & G(\vec{\alpha}) = 0, \\ \text{og} & \vec{x} \in V_1. \end{cases}$$

Finner da en egenvektor $\vec{v}_2 \in V_1$. Siden $\vec{v}_2 \in V_1$, så er $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = 0$.

Steg 6.
Vi fortsetter induktivt og får n egenvektorer

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

som er en ortogonal mengde. Ved å normalisere, får vi en ortonormal mengde. $\square$