7.1 Diagonalisering av symmetriske matriser

Litt repetisjon. En $n \times n$ matrise er symmetrisk hvis $A^T = A$. Vi viste i Forelesning 28 at om A er symmetrisk, så er

$$\vec{x} \cdot A\vec{y} = A\vec{x} \cdot \vec{y},$$

for alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Teorem 7.1
La A være symmetrisk. Hvis $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier, så er $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Bevis. La egenverdiene være λ_1 og λ_2. Da er

$$\lambda_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \lambda_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = A\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$
$$= \vec{v}_1 \cdot A\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2).$$

Siden $\lambda_1 \neq \lambda_2$ så må $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$. $\square$

Eksempel 7.1.3
Ortogonalt diagonaliser $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1. A er symmetrisk, fortsett.

2. Karakteristisk ligning er

$$0 = \det(A - \lambda I) = \cdots = -(\lambda-7)^2(\lambda+2).$$

Egenverdier $\lambda = 7$ og $\lambda = -2$. Generell løsning av $(A-7I)\vec{x} = \vec{0}$,

$$A - 7I = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{så } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

For $\lambda = -2$ får vi $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(Kommentar: Som forventet $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$ og $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$.)

3. Egenverdien $\lambda = 7$ har to lineært uavhengige egenvektorer.

$$\vec{z}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tar med oss $\{\vec{v}_1, \vec{z}_2, \vec{v}_3\}$ videre.

4. Normalisering:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{z}_2\|} \vec{z}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|} \vec{v}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5. $A = PDP^T$ for $P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3]$ og $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Oppgave 7.1.36
Anta at A og B er ortogonalt diagonaliserbare og at

$$AB = BA. \qquad (*)$$

Er AB ortogonalt diagonaliserbar?

Ortogonalt diagonaliserbar $\iff$ Symmetrisk.

$$(AB)^T = B^T A^T \underset{\substack{A,B \text{ er} \\ \text{symmetrisk}}}{=} BA \underset{(*)}{=} AB,$$

så AB er ortogonalt diagonaliserbar.

Spektraldekomposisjon
La A være en symmetrisk $n \times n$ matrise og diagonaliser

$$A = PDP^T$$

for $P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \cdots \vec{u}_n]$ og $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Vi vil regne ut $A\vec{x} = PDP^T\vec{x}$. To steg:

$$PD = [\lambda_1 \vec{u}_1 \ \lambda_2 \vec{u}_2 \cdots \lambda_n \vec{u}_n]$$

$$P^T \vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{x} \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{x} \cdot \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{x} \cdot \vec{u}_n \end{bmatrix}$$

Så da blir:

$$A\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u}_1)\lambda_1 \vec{u}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{u}_2)\lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + (\vec{x} \cdot \vec{u}_n)\lambda_n \vec{u}_n$$
$$= \lambda_1 \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1}_{\text{Projeksjon av } \vec{x} \text{ på } \vec{u}_1.} + \lambda_2 (\vec{x} \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n (\vec{x} \cdot \vec{u}_n)\vec{u}_n.$$