7.2 Kvadratiske former

Definisjon. En kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$ er en funksjon $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som kan uttrykkes som

$$Q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A\vec{x}$$

for en symmetrisk matrise A. Vi kaller A matrisen til Q.

Eksempel 7.2.1

Regn ut Q gitt matrisen.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$$Q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = 4x_1^2 + 3x_2^2.$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

$$Q(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} = x_1(3x_1 - 2x_2) + x_2(-2x_1 + 7x_2)$$

$$= 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 7x_2^2$$

$$= 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2$$

Hvordan ser en generell kvadratisk form ut?

Generelt vil en kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$ være en sum av ledd på formen

$$c_{j,k}\, x_j x_k$$

for $1 \le j \le n$ og $1 \le k \le j$. (Siden $x_j x_k = x_k x_j$.)

$A = [a_{j,k}]_{j,k=1}^{n}$ den er symmetrisk hvis og bare hvis

$$a_{j,k} = a_{k,j}$$

Altså er

- $c_{j,j} = a_{j,j}$ for $1 \le j \le n$
- $c_{j,k} = 2a_{j,k}$ $(= a_{j,k} + a_{k,j})$ for $1 \le j \le n$ og $1 \le k < j$.

Eksempel 7.2.2

La $Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3$. Finn A.

Vi har tre variabler, så A skal være 3×3 og symmetrisk.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hvis $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix}$, så er

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Hvis A har spektral dekomposisjon

$$A\vec{x} = \lambda_1 (\vec{x} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + \lambda_2 (\vec{x} \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n (\vec{x} \cdot \vec{u}_n)\vec{u}_n$$

Så blir

$$Q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A\vec{x}$$

$$= \lambda_1 (\vec{x} \cdot \vec{u}_1)^2 + \lambda_2 (\vec{x} \cdot \vec{u}_2)^2 + \cdots + \lambda_n (\vec{x} \cdot \vec{u}_n)^2.$$

Siden $P = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2 \cdots \vec{u}_n]$ er ortogonal gir Teorem 6.7 at

$$(\vec{x} \cdot \vec{u}_1)^2 + (\vec{x} \cdot \vec{u}_2)^2 + \cdots + (\vec{x} \cdot \vec{u}_n)^2 = \|P\vec{x}\|^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \|\vec{x}\|^2$$