Eksamen 2018: Oppgave 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Siden

$$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{v}_1$$

så er $\vec{v}_1$ en egenvektor med egenverdi $\lambda_1 = 1$.

Siden

$$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{v}_2$$

så er $\vec{v}_2$ en egenvektor med egenverdi $\lambda_2 = 1$.

Merknad. Her har egenverdien $\lambda = 1$ (minst) to lineært uavhengige egenvektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$. Altså er den geometriske multiplisiteten til $\lambda = 1$ (minst) to.

For å vise at $\lambda = 2$ er en egenverdi holder det å regne ut at

$$\det(A - 2I) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Vi vil heller forsøke å finne en egenvektor.

Ser derfor på generell løsning av $(A-2I)\vec{x} = \vec{0}$. Vi radreduserer

$$A-2I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Generell løsning oppfyller $x_1 + x_2 = 0$ og $x_1 + x_3 = 0$, så generell løsning blir

$$\vec{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at $\lambda_3 = 2$ er en egenverdi med egenvektor

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Siden $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ er lineært uavhengig og A er 3×3, så er A diagonaliserbar. Spesielt er

$$A = PDP^{-1}$$

for

$$P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Videre, så regner

$$A^2 = A \cdot A = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^3P^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^{10} = A^9 \cdot A = (PD^9P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{10}P^{-1}.$$

Altså er $PD^{10}P^{-1}$ en diagonalisering av A^{10}, som betyr at tallene på diagonalen til D^{10} er egenverdiene til A^{10}.

$$D^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix}.$$

Egenverdiene til A^{10} er $1, 1$ og 2^{10}.

(c) Vi har systemet

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = A\vec{x}(t), \\ \vec{x}(0) = (1,-1,1). \end{cases}$$

Her er $A = PDP^{-1}$, for $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ og

$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vi substituerer

$$\vec{y}(t) = P^{-1}\vec{x}(t)$$

og får vi

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = D\vec{y}(t) & , \\ \vec{y}(0) = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matlab-vedlegg.

Siden D er diagonal kan vi skrive dette som

$y_1'(t) = 1 \cdot y_1(t)$ og $y_1(0) = -2$, så $y_1(t) = -2e^t$.

$y_2'(t) = 1 \cdot y_2(t)$ og $y_2(0) = 0$, så $y_2(t) = 0$.

$y_3'(t) = 2 \cdot y_3(t)$ og $y_3(0) = 1$, så $y_3(t) = e^{2t}$.

Da er

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} -2e^t \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix},$$

og

$$\vec{x}(t) = P\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2e^t \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} \\ -2e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$