Eksamen 2017: Oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Vi vil vise at $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor.

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\vec{x},$$

altså er $\vec{x}$ en egenvektor med egenverdi $\lambda = 4$.

For de andre egenverdiene regner vi

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) = \cdots &= (3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - (2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) \\ &= (2-\lambda)^2(4-\lambda), \end{aligned}$$

Så egenverdiene er $\lambda = 4$ (algebraisk multiplisitet 1) og $\lambda = 2$ (algebraisk multiplisitet 2).

(b) A er ortogonalt diagonaliserbar siden A er symmetrisk.

Vi har

$\lambda_1 = 4$ med egenvektor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Velger $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

For $\lambda = 2$, trenger vi egenvektorer. Generell løsning av $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Generell løsning er

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Får egenvektorer

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Her er $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$ (flaks!) og $\|\vec{v}_3\| = 1$. Velger

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da blir $A = PDP^T$ for

$$P = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Matrisen til $Q(\vec{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$ er

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hvis P er som i (b) og $\vec{x} = P\vec{y}$, så er $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ – siden P er ortogonal – og

$$Q(\vec{x}) = \vec{y} \cdot D\vec{y} = 4y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2.$$

Altså er

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) \leq 4y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 &= 4(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &= 4\|\vec{y}\|^2 \\ &= 4\|\vec{x}\|^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

fordi $\|\vec{x}\| = 1$. Ved å velge $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ blir $Q(\vec{x}) = 4$. Altså er maksimum 4.

Dette kunne man argumentert direkte som følger:

Siden 4 er den største egenverdien til A,

så er

$$\max \{ Q(\vec{x}) : \|\vec{x}\| = 1 \} = 4.$$