Eksamen 2020: Oppgave 1

Vi lar $A = [\vec{a_1}\ \vec{a_2}\ \vec{a_3}\ \vec{a_4}\ \vec{a_5}]$ betegne 4×5 matrisen som er oppgitt i oppgaven.

(a) Fra Matlab-vedlegg ser vi at radreduksjon av A har pivoter i kolonne 1, 2 og 4. Altså gir Teorem 4.6 at

$$\mathcal{B} = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}\}$$

er en basis for $\mathrm{Col}(A)$. Vi ser også fra Matlab-vedlegg og Teorem 4.7 at

$$\vec{a_3} = \vec{a_1} - \vec{a_2} \quad \text{og} \quad \vec{a_5} = -\frac{1}{2}\vec{a_1} - \frac{1}{2}\vec{a_2} + \frac{1}{2}\vec{a_4}.$$

(b) Av rangteoremet (Teorem 4.14) vet vi at

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = 5,$$

siden A har 5 kolonner. Fra (a) vet vi at $\mathrm{rank}(A) = 3$. Altså er

$$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = \mathrm{nullity}(A) = 2.$$

La $B = [\vec{b_1}\ \vec{b_2}\ \vec{b_3}]$ være en 5×3 matrise.

Da er $AB = [A\vec{b_1}\ A\vec{b_2}\ A\vec{b_3}]$. Altså må

$\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ og $\vec{b_3}$ være i Nul(A). Vi vet fra (a) at

$$\vec{a_3} = \vec{a_1} - \vec{a_2} \quad \text{og} \quad \vec{a_5} = -\tfrac{1}{2}\vec{a_1} - \tfrac{1}{2}\vec{a_2} + \tfrac{1}{2}\vec{a_4},$$

så

$$\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan velge $\vec{b_3}$ som en lineærkombinasjon av $\vec{b_1}$ og $\vec{b_2}$. Da blir

$$AB = 0$$

og rank(B) = 2 fordi B har to lineært uavhengige kolonner. Et eksplisitt valg er

$$\vec{b_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eksamen 2020: Oppgave 2

(a) Ved Matlab-vedlegg er

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda+1)^2.$$

Egenverdiene er $\lambda = 0$ (algebraisk multiplisitet 1) og $\lambda = -1$ (algebraisk multiplisitet 2).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a_1} & \vec{a_2} & \vec{a_3} \end{bmatrix}.$$

Siden $2\vec{a_1} + \vec{a_2} = \vec{0}$, så er $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en egenvektor for egenverdien $\lambda_1 = 0$. For $\lambda = -1$, regner vi:

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Generell løsning av $(A+I)\vec{x} = \vec{0}$ er

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Egenverdien $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ har lineært uavhengige egenvektorer

$$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Altså har A tre lineært uavhengige egenvektorer, og derfor er A diagonaliserbar.

En basis for $\mathbb{R}^3$ er $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$.

(b) La $\vec{x}_0$ være en vektor i $\mathbb{R}^3$. Siden

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$$

fra (a) er en basis for $\mathbb{R}^3$ finnes unike tall c_1, c_2 og c_3 slik at

$$\vec{x}_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3.$$

Hvis $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ for $k \geq 0$, så er

$$\vec{x}_k = A^k\vec{x}_0 = c_1A^k\vec{v}_1 + c_2A^k\vec{v}_2 + c_3A^k\vec{v}_3$$
$$= c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2 + c_3\lambda_3^k\vec{v}_3,$$

siden $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$ er egenvektorer. Siden $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ og $\lambda_3 = -1$, får vi for $k \geq 1$ at

$$\vec{x}_k = c_2(-1)^k\vec{v}_2 + c_3(-1)^k\vec{v}_3$$
$$= (-1)^k(c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3).$$

Altså er

$$\|\vec{x}_k\| = \|(-1)^k(c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3)\|$$
$$= |(-1)^k| \cdot \|c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3\| = \|c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3\| = C$$

for alle $k \geq 1$.

Eksamen 2020: Oppgave 4

La
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

og $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definert ved $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

(a) For å sjekke om A er positivt definitt trenger vi egenverdiene:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6)$$

Egenverdiene er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 6$, så A er positivt definitt.

Fra Teorem 5.8 vet vi at
$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = D$$

hvis og bare hvis $A = PDP^{-1}$ for en invertibel matrise P, der

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \quad \text{og} \quad P = [\vec{u}_1 \; \vec{u}_2].$$

Vi blir bedt om å finne en ortonormal basis B, så vi må ortogonalt diagonalisere A.

Egenvektorene til $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 6$ er

$$\vdots$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ved Teorem 7.1 vet vi at $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, siden A er symmetrisk. Altså trenger vi bare å normalisere, og velger

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi vil finne Q slik at $[\vec{x}]_B = Q\vec{x}$. La P være matrisen fra (a). Da

$$P[\vec{x}]_B = \vec{x}.$$

Da er $Q = P^{-1} = P^T$ siden P er ortogonal.

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right)^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

La $S = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$. Anta at

$$\vec{y} \in \{ T(\vec{x}) : \vec{x} \in S \}$$

og at $\vec{z} = [\vec{y}]_B$. Siden P er ortogonal, så er $\|P\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ og 1-1. Da er $P(S) = S$.

$$\{ T(\vec{x}) : \vec{x} \in S \} = \{ T(\vec{x}) : \vec{x} \in P(S) \}$$

$$= \{ A\vec{x} : \vec{x} \in P(S) \}$$

$$= \{ AP\vec{x} : \vec{x} \in S \}$$

$$= \{ PDP^T P\vec{x} : \vec{x} \in S \}$$

$$= \{ PD\vec{x} : \vec{x} \in S \}.$$

Altså blir

$$\vec{z} = [\vec{y}]_B = P^T P D \vec{x} = D\vec{x} = (x_1, 6x_2).$$

Da er

$$z_1^2 + \frac{z_2^2}{6^2} = x_1^2 + \frac{(6x_2)^2}{6^2} = x_1^2 + x_2^2 = 1$$

fordi $\vec{x} \in S$.