5.1 Egenverdier og egenvektorer

Definisjon. La A være en $n\times n$-matrise. Et tall λ kalles en egenverdi for A dersom det finnes en vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ slik at

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}.$$

Vektoren $\vec{x}$ kalles for egenvektoren til egenverdien λ.

Eksempel. (Diagonalmatrise)

$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$. Ligningen $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ blir

$$\begin{aligned} ax_1 &= \lambda x_1 & &\longrightarrow & \lambda = a \text{ og } \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ bx_2 &= \lambda x_2 & &\longrightarrow & \lambda = b \text{ og } \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ cx_3 &= \lambda x_3 & &\longrightarrow & \lambda = c \text{ og } \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eksempel 5.1.2 + 5.1.3

$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Er $\vec{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ egenvektorer?

(b) $\lambda = 7$ er en egenverdi. Hva er en egenvektor?

(a) $A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4\vec{u}$. Ja!

$A\vec{v} = \ldots\ldots = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda\vec{v}$. Nei!

(b) Vi vil ha en løsning $\vec{x} \neq \vec{0}$ til $A\vec{x} = 7\vec{x}$, dvs.

$(A - 7I)\vec{x} = \vec{0}$.

$$A - 7I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Generell løsning av $(A - 7I)\vec{x} = \vec{0}$ er

$$\vec{x} = x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{for } x_2 \in \mathbb{R}.$$

Vi kan velge egenvektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Definisjon. La A være en $n\times n$-matrise med en egenverdi λ. Egenrommet til λ er underrommet av $\mathbb{R}^n$ som består av alle egenvektorer til λ og $\vec{0}$.

Alternativt: Egenrommet til λ er $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$.

Eksempel 5.1.4

$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ har $\lambda = 2$ som egenverdi. Finn en basis for egenrommet.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Generell løsning til $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$ er

$$\vec{x} = x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \end{bmatrix}.$$

En basis er $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \end{bmatrix} \right\}$.

Egenrommet er et plan som går gjennom origo, så hvis $\vec{x}$ ligger i planet er $A\vec{x} = 2\vec{x}$.

Et skittent triks. Hvis hver rad i en matrise A har samme sum, så er denne summen en egenverdi og egenvektoren er $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Eksempel 5.1.4 (fortsettelse)

Her er radsummen 9 i hver rad, så $\lambda = 9$ er en egenverdi. En basis for egenrommet er

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$