7.2 Kvadratiske former

Betrakt den ikke-symmetriske matrisen $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ og

$$
\begin{aligned}
Q(\vec{x}) &= \vec{x} \cdot B\vec{x} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5x_1 - x_2 + x_1 \\ 3x_2 + 8x_3 \\ -x_1 + 2x_3 \end{bmatrix} \\
&= 5x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + 3x_2^2 + 8x_2x_3 - x_1x_3 + 2x_3^2 \\
&= 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3.
\end{aligned}
$$

Vi kjenner igjen denne kvadratiske formen fra Eksempel 7.2.2 (Forelesning 29) og husker at

$$
Q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A\vec{x} \quad \text{for} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Det er mange matrise som gir samme kvadratiske form, men det er bare én av dem som er symmetrisk.

Siden symmetriske matriser er ortogonalt diagonaliserbare gir det oss visse fordeler.

Teorem 7.4 (Prinsipalakse-teoremet)

La A være en $n \times n$ symmetrisk matrise og la

$$Q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A\vec{x}.$$

Det finnes en ortogonal matrise P og en diagonalmatrise D slik at

$$Q(\vec{x}) = R(\vec{y})$$

der $\vec{y} = P\vec{x}$ og $R(\vec{y}) = \vec{y} \cdot D\vec{y}$.

Bevis.

Siden A er symmetrisk har vi $A = PDP^T$. Om

$$\vec{y} = P\vec{x}$$

så er

$$\begin{aligned} R(\vec{y}) = \vec{y} \cdot D\vec{y} &= (P\vec{x}) \cdot DP\vec{x} \\ &= (P\vec{x})^T DP\vec{x} \\ &= \vec{x}^T P^T DP\vec{x} \\ &= \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x} \cdot A\vec{x} = Q(\vec{x}), \end{aligned}$$

siden $D = PAP^T$ og $P^{-1} = P^T$. $\square$

Merknad. Siden P er ortogonal så er

$$\|\vec{y}\| = \|P\vec{x}\| = \|\vec{x}\|.$$

Dette er essensielt i Kapittel 7.3.

Definisjon. En kvadratisk form Q kalles

(a) positiv definitt om $Q(\vec{x}) > 0$ for alle $\vec{x} \neq \vec{0}$,

(b) negativ definitt om $Q(\vec{x}) < 0$ for alle $\vec{x} \neq \vec{0}$,

(c) indefinitt om $Q(\vec{x})$ tar både positive og negative verdier.

Ved å bruke spektralteoremet kan vi bestemme dette ut fra egenverdiene til matrisen til Q.

Teorem 6.5 (Kvadratiske former og egenverdier)
La A være en $n \times n$ symmetrisk matrise og la

$$Q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A\vec{x}.$$

Da er Q

(a) positiv definitt $\Leftrightarrow$ egenverdiene til A er positive,

(b) negativ definitt $\Leftrightarrow$ egenverdiene til A er negative,

(c) indefinitt $\Leftrightarrow$ A har både positive og negative egenverdier.

Bevis. Ved spektraldekomposisjonen til A er

$$Q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A\vec{x}$$
$$= \lambda_1 (\vec{x} \cdot \vec{u}_1)^2 + \lambda_2 (\vec{x} \cdot \vec{u}_2)^2 + \dots + \lambda_n (\vec{x} \cdot \vec{u}_n)^2.$$

Siden $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ er ortonormal følger resultatet. $\square$

(Kan ekvivalent bruke prinsipalakseteoremet.)

Eksamen 2018: Oppgave 3

La $a \in \mathbb{R}$ og la $Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være den kvadratiske formen

$$Q(\vec{x}) = ax_1^2 - 2x_1x_2 + ax_2^2.$$

For hvilke a er Q positiv definitt?

Vi må finne matrisen til Q og regne ut egenverdiene.

1. Matrisen blir $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$.

2. Egenverdier:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & -1 \\ -1 & a-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)^2 - 1.$$

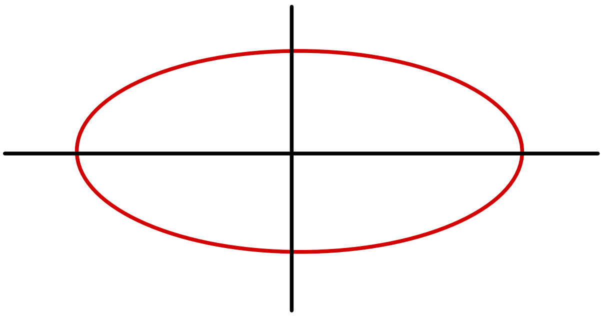
Vi får altså $\lambda_1 = a-1$ og $\lambda_2 = a+1$.

3. Vi har $\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 > 0$ hvis og bare hvis $a > 1$.

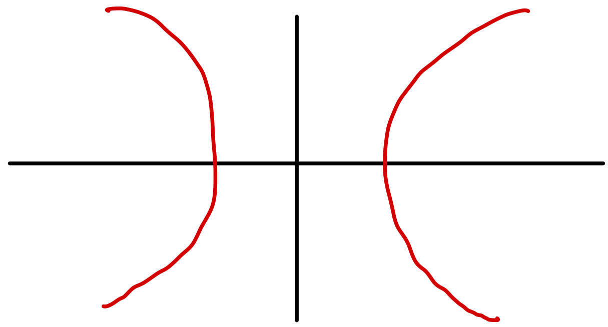
Altså er Q positiv definitt hvis og bare hvis $a > 1$.

Kjeglesnitt

Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Hvis P er en 2×2 ortogonal matrise, så er

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

for et tall $0 \leq \theta < 2\pi$.

La $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en kvadratisk form.

(a) Hvis Q er positivt definitt er $Q(\vec{x}) = 1$ ligningen til en rotert ellipse.

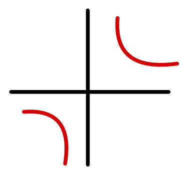
(b) Hvis Q er negativt definitt har $Q(\vec{x}) = 1$ ingen løsning.

(c) Hvis Q er indefinitt er $Q(\vec{x}) = 1$ ligningen til en rotert hyperbel.

Eksempel. $y = \frac{1}{x} \iff xy = 1 \implies A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

Da er $A = PDP^T$ for $D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$ og $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Hyperbel $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ rotert $\theta = \frac{\pi}{4}$.



Oppgave 7.2.10

La $Q(\vec{x}) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$.

(a) Klassifiser den kvadratiske formen Q.

(b) Finn en ortogonal matrise P og en diagonalmatrise D slik at om $\vec{y} = P\vec{x}$, så er

$$Q(\vec{x}) = \vec{y} \cdot D\vec{y}.$$

(a) Finner $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ og løser

$$0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 9 - 16 = \lambda^2 - 25$$

så $\lambda_1 = 5$ og $\lambda_2 = -5$. Altså er A indefinitt.

(b) Ser på

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og finner egenvektor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, normalisert $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tilsvarende blir $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, normalisert $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Altså blir $P = [\vec{u}_1 \; \vec{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Hvis $\vec{y} = P\vec{x}$

blir

$$Q(\vec{x}) = \vec{y} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \vec{y} = 5y_1^2 - 5y_2^2.$$

Hvis $Q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A\vec{x}$ for en symmetrisk matrise A, så kaller vi ofte A positiv definitt, negativ definitt og indefinitt dersom Q er det.

Oppgave 7.2.34

La A være en $n \times n$ symmetrisk og positiv definitt matrise. Vis at det finnes en symmetrisk og positiv definitt matrise B slik at $A = B^T B$.

Siden $B^T = B$ er det faktisk $A = B^2$. Hvordan kan vi lage $B = \sqrt{A}$?

Siden A er symmetrisk er $A = PDP^T$ for

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Siden A er positiv definitt er $\lambda_j > 0$. Definer

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Da er $C^T C = C^2 = D$. Hvis $B = PCP^T$ så er B symmetrisk og positiv definitt. Videre er

$$B^T B = B \cdot B = (PCP^T)(PCP^T) = PC^2P^T = PDP^T = A. \quad \square$$