Oppgave 5.1.20

Finn to egenverdier og (totalt) tre lineært uavhengige egenvektorer til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Ved inspeksjon.

Trikset: $\lambda = 5$ og $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 0$ og $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Teorem 5.2

La A være en $n \times n$-matrise. Hvis $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_k}$ er egenvektorer for distinkte egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, så er $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_k}\}$ lineært uavhengig.

Bevis. Hvis 0 er en av egenverdiene, så sier vi at $\lambda_1 = 0$.

① Siden $\vec{x_1} \neq \vec{0}$. er $\{\vec{x_1}\}$ lineært uavhengig.

② Anta at $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_{k-1}}\}$ er lineært uavhengig, og at

$$\vec{x_k} = c_1 \vec{x_1} + \cdots + c_{k-1} \vec{x_{k-1}}. \quad (*)$$

Siden $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_{k-1}}\}$ er lineært uavhengige finnes det kun ett valg $c_1, \dots, c_{k-1}$ som oppfyller $(*)$.

③ Vi bruker A på begge sider av $(*)$.

$$\lambda_k \vec{x_k} = c_1 \lambda_1 \vec{x_1} + \cdots + c_{k-1} \lambda_{k-1} \vec{x_{k-1}}.$$

$$\vec{x_k} = c_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_k} \vec{x_1} + \cdots + c_{k-1} \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \vec{x_{k-1}}.$$

Siden $(*)$ er eneste mulige representasjon, må

$$c_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_k} c_j$$

for $j = 1, \dots, k-1$. Siden $\lambda_j \neq \lambda_k$ er $c_j = 0$ for $j = 1, \dots, k-1$. Men da er $\vec{x_k} = \vec{0}$, som er en motsigelse. □

Korollar. En $n \times n$-matrise har maksimalt n egenverdier.

Teorem 5.1

Hvis A er en triangulær $n \times n$-matrise, så er egenverdiene tallene på diagonalen.

"**Bevis.**" Ligningen $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ må ha ikke-trivielle løsninger hvis λ skal være en egenverdi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

Eksempel 5.1.5

Matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ har egenverdier $3, 0, 2$.

Matrisen $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ har egenverdier 4 og 1.

Oppgave 5.1.34

Vis at dersom $A^2 = 0$ så er $\lambda = 0$ den eneste egenverdien til A.

① Anta at $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ for $\vec{x} \neq \vec{0}$. Bruker A på begge sider.

$$\vec{0} = 0\vec{x} = AA\vec{x} = \lambda A \vec{x} = \lambda^2 \vec{x}$$

Altså er $\lambda^2 = 0$, men da er $\lambda = 0$.

② Velg en tilfeldig vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$.

- Hvis $A\vec{x} = \vec{0}$ så er $\lambda = 0$ en egenverdi med egenvektor $\vec{x}$.
- Hvis $\vec{y} = A\vec{x} \neq \vec{0}$ så er $\lambda = 0$ en egenverdi med egenvektor $\vec{y}$, siden

$$A\vec{y} = A(A\vec{x}) = A^2\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}.$$

Sidespor. Vis at det finnes irrasjonale tall $a, b > 0$ slik at a^b er rasjonal.

- Hvis $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ er rasjonal er vi ferdige med $a = b = \sqrt{2}$.
- Ellers er

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

og vi er ferdige med $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ og $b = \sqrt{2}$.