7.3 Begrenset optimalisering

Hvis $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, så er

$$\|\vec{x}\| = 1 \iff \|\vec{x}\|^2 = 1 \iff x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Eksempel 7.3.1

Finn maksimum og minimum til

$$Q(\vec{x}) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$$

under begrensningen $\|\vec{x}\| = 1$.

Siden $x_2^2 \geq 0$ og $x_3^2 \geq 0$ har vi

$$4x_2^2 \leq 9x_2^2 \quad \text{og} \quad 3x_3^2 \leq 9x_3^2.$$

Da blir

$$Q(\vec{x}) \leq 9x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 9.$$

Velger vi $\vec{x} = (\pm 1, 0, 0)$ blir $Q(\vec{x}) = 9$. Maksimum = 9.

For minimum får vi tilsvarende

$$Q(\vec{x}) \geq 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 3.$$

Velger vi $\vec{x} = (0, 0, \pm 1)$ blir $Q(\vec{x}) = 3$. Minimum = 3.

<u>Merknad.</u> Matrisen til Q er $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Egenverdiene til A er 9, 4 og 3.

<u>Definisjon.</u> La A være en symmetrisk matrise med kvadratisk form Q. Sett

$m = \min \{ Q(\vec{x}) : \|\vec{x}\| = 1 \}$ og $M = \max \{ Q(\vec{x}) : \|\vec{x}\| = 1 \}$.

<u>Oppgave 7.3.12</u>

La A være en symmetrisk matrise og la λ være en egenverdi til A. Vis at $m \leq \lambda \leq M$.

Siden λ er en egenverdi finnes en egenvektor $\vec{v}$ med $\|\vec{v}\| = 1$. Da følger det av definisjonen at

$$m \leq Q(\vec{v}) \leq M.$$

Videre er

$$Q(\vec{v}) = \vec{v} \cdot A\vec{v} = \vec{v} \cdot \lambda \vec{v} = \lambda (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \lambda \|\vec{v}\|^2 = \lambda.$$

Teorem 7.6

La A være en $n\times n$ symmetrisk matrise med egenverdier

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

og tilhørende egenvektorer $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$. Da er

(a) $M = Q(\vec{v}_1) = \lambda_1$,

(b) $m = Q(\vec{v}_n) = \lambda_n$.

Bevis. (a) er en umiddelbar konsekvens av beviset for spektralteoremet (Forelesning 28).

(b) La $B = -A$. Egenverdiene til B er

$$-\lambda_n \geq -\lambda_{n-1} \geq \cdots \geq -\lambda_2 \geq -\lambda_1.$$

Videre er $M_B = -m_A$. Altså følger det av (a) anvendt på B at $-\lambda_n = -m_A$, eller $m_A = \lambda_n$.

Merknad. I ukesoppgave 7.3.13 skal dere vise at for ethvert tall $m \leq t \leq M$ finnes en vektor $\vec{x}$ med lengde 1 slik at $Q(\vec{x}) = t$.

Altså er $\{Q(\vec{x}) : \|\vec{x}\| = 1\} = [m, M]$.

Teorem 7.8

La A være en $n \times n$ symmetrisk matrise med egenverdier

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

og tilhørende egenvektorer $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$. La $1 < k \leq n$ være et heltall og M_k betegne maksima av $Q(\vec{x})$ gitt betingelsene

- $\|\vec{x}\| = 1$
- $\vec{x} \cdot \vec{u}_j = 0$ for $j = 1, \ldots, k-1$.

Da er $M_k = \lambda_k$ og maksima inntreffer i $\vec{x} = \vec{u}_k$.

Bevis. Ved spektraldekomposisjonen til A har vi

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 (\vec{x} \cdot \vec{u}_1)^2 + \lambda_2 (\vec{x} \cdot \vec{u}_2)^2 + \cdots + \lambda_n (\vec{x} \cdot \vec{u}_n)^2$$

$$\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x} \cdot \vec{u}_1)^2 + (\vec{x} \cdot \vec{u}_2)^2 + \cdots + (\vec{x} \cdot \vec{u}_n)^2$$

Under betingelsene blir dette

$$Q(\vec{x}) = \lambda_k (\vec{x} \cdot \vec{u}_k)^2 + \cdots + \lambda_n (\vec{x} \cdot \vec{u}_n)^2$$

$$1 = (\vec{x} \cdot \vec{u}_k)^2 + \cdots + (\vec{x} \cdot \vec{u}_n)^2$$

Det følger at $Q(\vec{x}) \leq \lambda_k$, siden $\lambda_k \geq \lambda_j$ for $j \geq k$ og siden $Q(\vec{u}_k) = \lambda_k$ er vi ferdige. $\square$

Oppgave 7.2.2

Matrisen til den kvadratiske formen

$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^3 + 10x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

er

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Når vi ortogonalt diagonaliserer $A = PDP^T$ får vi

$$R(\vec{y}) = \vec{y} \cdot D\vec{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 11y_1^2 + 2y_2^2 + 0y_3^2.$$

Altså er egenverdiene til A $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 0$.

Vi finner egenvektor til $\lambda_1 = 11$.

$$A - 11I = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 5 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\tfrac{5}{2} \\ 3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 11 & -22 \\ 0 & -11 & 22 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -1/11 \\ 1/2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Generell løsning oppfyller $x_2 = 2x_3$ og $x_1 + x_2 = 4x_3$

eller $x_2 = -3x_3$ og $x_1 = x_3$.

$$\vec{x} = c\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende utregning gir at $\lambda_2 = 2$ har egenvektor

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

For egenvektor til $\lambda_3 = 0$ ser vi igjen på A:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Siden de to første kolonnene er like er $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en egenvektor. Vi får $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Altså blir

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/2\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/3 & -4/2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 7.2.4

(a) Fra Teorem 7.6 og Oppgave 7.2.2 blir maksima

$\lambda_1 = 11$

(b) Fra Teorem 7.6 og Oppgave 7.2.2 er $\lambda_1 = Q(\vec{u}_1)$, så her er $\vec{u} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Fra Teorem 7.8 og Oppgave 7.2.2 er nå maksima

$\lambda_2 = 2$.