7.4 Singulærverdi-dekomposisjon

Bevis for Teorem 7.10.

Vi lar

$$V = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]$$

der $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer til A^TA med tilhørende egenverdier

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

La $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ og la Σ være $m \times n$ matrisen hvor øvre venstre diagonal består av de r singulærverdiene som ikke er lik 0,

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

For $j = 1, 2, \ldots, r$, la $\vec{u}_j = \frac{1}{\sigma_j} A\vec{v}_j$. Da er $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ en ortonormal basis for $\mathrm{Col}(A)$. Ved Teorem 7.9. Hvis $r < m$, velg $\vec{u}_j$ for $j = r+1, \ldots, m$ slik at

$$U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \cdots \ \vec{u}_m]$$

er ortogonal.

Vi vil vise at

$$A\vec{x} = U\Sigma V^T\vec{x}$$

for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Siden

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

er en basis for $\mathbb{R}^n$ kan vi skrive

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = V\vec{c}.$$

Ved Teorem 7.9 er

$$A\vec{x} = c_1 A\vec{v}_1 + \cdots + c_r A\vec{v}_r = c_1\sigma_1\vec{u}_1 + \cdots + c_r\sigma_r\vec{u}_r.$$

Siden $\vec{x} = V\vec{c}$ er $V^T\vec{x} = \vec{c}$. Videre er

$$U\Sigma = \underset{m\times m}{\begin{bmatrix}\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_m\end{bmatrix}} \underset{m\times n}{\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \ddots \; \sigma_r & \\ 0 & & 0\end{bmatrix}} = \underset{m\times n}{\begin{bmatrix}\sigma_1\vec{u}_1 \cdots \sigma_r\vec{u}_r & \vec{0} \cdots \vec{0}\end{bmatrix}}$$

Så

$$U\Sigma V^T\vec{x} = U\Sigma\vec{c} = c_1\sigma_1\vec{u}_1 + \cdots + c_r\sigma_r\vec{u}_r. \qquad \square$$

Eksempel 7.4.4

Finn en singulærverdi-dekomposisjon av $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

3×2

Merknad. Her er $\text{rank}(A) = 1$, så vi forventer $r = 1$.

1. Vi regner ut

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}.$$

Egenverdiene er $\lambda_1 = 18$ og $\lambda_2 = 0$ med egenvektorer

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. $V = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Vi har $\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ og $\sigma_2 = 0$. Da er $r = 1$ og $D = [3\sqrt{2}]$. Vi får

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Siden $r=1$ regner vi bare

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \vec{v}_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi vil finne $\vec{u}_2$ og $\vec{u}_3$ som løser ligningen

$$0 = \vec{x} \cdot \vec{u}_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$$

og slik at $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ er ortonormal. Det er flere muligheter. Boka finner generell løsning og bruker Gram-Schmidt. Vi kan velge

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

slik at $\vec{u}_3$ i tillegg må oppfylle $x_2 + x_3 = 0$.

Da får vi

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi får dermed

$$U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

5. $A = U \Sigma V^T$.

Eksamen 2014: Oppgave 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) $B = A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$

Egenverdier

$0 = \det(B - \lambda I) = (6-\lambda)^2 - 1 \iff \lambda = 6 \pm 1,$

så $\lambda_1 = 7$ og $\lambda_2 = 5$.

Egenvektorer

$B - 7I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$B - 5I = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Basis for egenrom $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1\}$ og $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_2\}$.

(b) 1. Gjennomført i (a). A er 3×2.

2. $V = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

3. Singulærverdiene til A er

$$\sigma_1 = \sqrt{7} \quad \text{og} \quad \sigma_2 = \sqrt{5}.$$

Altså er $r = 2$.

Vi får

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Regner først

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Siden $r = 2 < 3 = m$ trenger vi $\vec{u}_3$ slik at $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_j = 0$ for $j = 1, 2$. Får ligningssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 \qquad - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 - 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Så velger

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da blir

$$U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{35} \\ 2/\sqrt{14} & 0 & 5/\sqrt{35} \\ -1/\sqrt{14} & -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{35} \end{bmatrix}.$$

5. Da er $A = U \Sigma V^T$.

(c) Den kvadratiske formen

$$Q(\vec{x}) = 6x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2$$

har matrise $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$. Fra (a) får vi

at

$$A = PDP^T$$

for $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Hvis

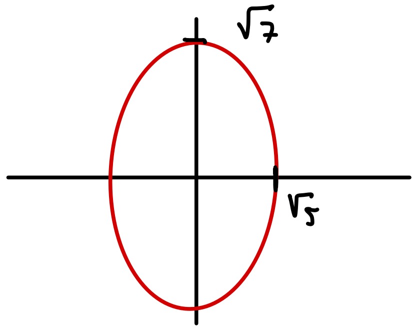
$\vec{x} = P\vec{y}$ så er

$$Q(\vec{x}) = \vec{y} \cdot D\vec{y} = 7y_1^2 + 5y_2^2.$$

Altså er

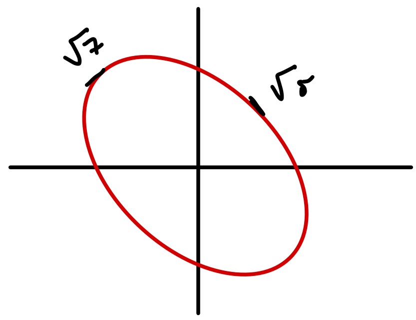
$$Q(\vec{x}) = 35 \iff \frac{y_1^2}{5} + \frac{y_2^2}{7} = 1.$$

I y_1y_2-planet får vi ellipsen.



Siden $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ for $\theta = \pi/4$,

blir figuren rotert til



i x_1x_2-planet.