5.2 Den karakteristiske ligningen

Eksempel 5.2.1 Finn egenverdiene til $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$.

Vi vil finne tall λ slik at $(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ har en ikke-triviell løsning. Det er ekvivalent med $\det(A-\lambda I) = 0$.

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-6-\lambda) - 9 = (\lambda-2)(\lambda+6) - 9$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda - 21 = (\lambda+7)(\lambda-3)$$

Egenverdiene er $\lambda = -7$ og $\lambda = 3$.

Merknad. Hvis A er $n \times n$ så er $\det(A-\lambda I)$ et polynom av grad n.

Definisjon. Polynomet $\det(A-\lambda I)$ kalles det karakteristiske polynomet til A og ligningen

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

kalles den karakteristiske ligningen til A.

Teorem. λ er en egenverdi til A hvis og bare hvis

$$\det(A-\lambda I) = 0.$$

Metode Gitt en $n \times n$ matrise A.

① Løs ligningen $\det(A-\lambda I) = 0$ for å finne egenverdiene.

② For hver egenverdi λ, radreduser $A-\lambda I$ for å finne egenvektorene.

Eksempel 5.2.3
Finn det karakteristiske polynomet til $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

—

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & & \text{NOE} & \\ & 3-\lambda & & \\ & 0 & 5-\lambda & \\ & & & 1-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

$$= (5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda).$$

Merknad. Polynomet har en dobbeltrot i $\lambda = 5$.

Definisjon. La A være en $n \times n$ matrise. Dersom egenverdien λ er en rot av orden k til $\det(A-\lambda I)$, så sier vi at λ har algebraisk multiplisitet k.

Eksempel 5.2.4
Det karakteristiske polynomet til en 6×6 matrise er

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4.$$

Hva er egenverdiene og deres algebraiske multiplisitet.

—

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = \lambda^4(\lambda+2)(\lambda-6)$$

Her er egenverdiene:

$\lambda = 6$. algebraisk multiplisitet 1

$\lambda = -2$. 1

$\lambda = 0$. 4

Definisjon. La A være en $n \times n$ matrise. Den geometriske multiplisiteten til en egenverdi λ er dimensjonen til egenrommet, det vil si

$$\text{nullity}(A-\lambda I) = \dim(\text{Nul}(A-\lambda I)).$$

Eksempel
La $k \neq 0$. Finn egenverdier og multiplisiteter til $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & k \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Egenverdi $\lambda = 1$ med algebraisk multiplisitet 2.

Løse $(A-I)\vec{x} = \vec{0}$. Siden $A - I = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ er generell løsning $\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Geometrisk multiplisitet 1.

Merknad. Man kan vise at den geometriske multiplisiteten alltid er mindre enn eller lik den algebraiske multiplisiteten.

Oppgave 5.2.18
Bestem h slik at egenverdien $\lambda = 5$ har geometrisk multiplisitet 2 for

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$