$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 5$$

Vi ser på

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6-h & 0 \\ 0 & -2 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{hvis } h \neq 6} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6-h & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

som gir generell løsning $\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Geometrisk multiplisitet 1 hvis $h \neq 6$.

Hvis $h = 6$ så blir geometrisk multiplisitet 2. (Krever en utregning.)

**Definisjon.** Vi sier at to $n \times n$ matriser $A$ og $B$ er similære dersom det finnes en invertibel matrise $P$ slik at $A = PBP^{-1}$.

**Merknad.** Vi har $B = QAQ^{-1}$ for $Q = P^{-1}$.

**Oppgave 5.2.32**

Vis at dersom $A$ og $B$ er similære, så er $\det(A) = \det(B)$.

—

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) \underset{\text{Teorem 5.3 (b)}}{=} (\det P)(\det B)(\det P^{-1})$$

$$= (\det B)(\det P)(\det P^{-1}) = (\det B)(\det I) = \det B.$$

**Teorem 5.4**

Hvis $A$ og $B$ er similære har de de samme egenverdiene med samme algebraiske og geometriske multiplisitet.

**Bevis.** Siden $I = PP^{-1} = PIP^{-1}$, har vi

$$A - \lambda I = PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1} = P(B - \lambda I)P^{-1},$$

og følgelig er $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$. Det betyr at $A$ og $B$ har samme karakteristiske polynom. Altså har de samme egenverdier med samme algebraiske multiplisitet.

La $\lambda$ være en egenverdi med $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ som basis for egenrommet for $A$. Da er

$$A\vec{x}_j = \lambda \vec{x}_j \quad \Longleftrightarrow \quad PBP^{-1}\vec{x}_j = \lambda \vec{x}_j$$

$$\Longleftrightarrow \quad B\underbrace{P^{-1}\vec{x}_j}_{=\vec{y}_j} = \lambda \underbrace{P^{-1}\vec{x}_j}_{\vec{y}_j}$$

Så $\vec{y}_j$ er egenvektor for egenverdi $\lambda$ for $B$. Siden $P^{-1}$ er invertibel er $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k\}$ lineært uavhengig. Altså er geometrisk for $B \geq$ geometrisk for $A$. Ved symmetri holder også $\leq$. $\square$

**Oppgave 5.2.20**

Vis at $A$ og $A^T$ har samme karakteristiske polynom.

—

$$\det(A - \lambda I) \underset{\text{Teorem 5.3 (c)}}{=} \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I^T)$$

$$= \det(A^T - \lambda I).$$

**Enda et skittent triks.** Hvis hver kolonne i en $n \times n$ matrise har samme sum, så er summen en egenverdi. (Ingen informasjon om egenvektor.)

**Eksempel.**

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Egenverdier og egenvektorer.

$\lambda_1 = 1$ $\quad\quad$ $\lambda_2 = 0.5$ $\quad\quad$ $\lambda_3 = 0.4$

$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad\quad$ $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\quad\quad$ $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Fra Teorem 5.2 vet vi at $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$. Hver $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ uttrykkes unikt ved

$$\vec{y}_0 = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$$

Vi må ha $c_1 > 0$ hvis antall mennesker ved start er $> 0$.

$$\vec{y}_1 = A\vec{y}_0 = c_1\lambda_1\vec{x}_1 + c_2\lambda_2\vec{x}_2 + c_3\lambda_3\vec{x}_3$$

$$\vec{y}_2 = A\vec{y}_1 = c_1\lambda_1^2\vec{x}_1 + c_2\lambda_2^2\vec{x}_2 + c_3\lambda_3^2\vec{x}_3$$

$$\vdots$$

$$\vec{y}_n = A\vec{y}_{n-1} = c_1\underline{\lambda_1}^n\vec{x}_1 + c_2\underline{\lambda_2}^n\vec{x}_2 + c_3\underline{\lambda_3}^n\vec{x}_3$$

Siden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.5$ og $\lambda_3 = 0.4$, så vil

$$\lim_{n \to \infty} \vec{y}_n = c_1\vec{x}_1.$$