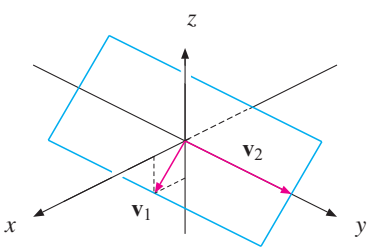
Så over til $\mathbb{R}^3$. Underrommet utspent av nullvektoren $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ blir bare nullvektoren selv (dvs. origo). Underrommet utspent av en enslig vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ blir linjen gjennom $\mathbf{v}$ og origo, akkurat som i tilfellet $\mathbb{R}^2$. Har vi *to* lineært uavhengige vektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ i $\mathbb{R}^3$, blir underrommet utspent av dem et **plan** gjennom origo. Planet er entydig bestemt ved at det inneholder origo samt de to punktene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Et eksempel er illustrert på figur 8.4.5, der et utsnitt av planet er markert. Vi skal se nærmere på begrepet plan i seksjon 8.6.



$\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$

$\mathbf{v}_2 = (0, 2, 0)$

Figur 8.4.5 Underrommet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er et plan i $\mathbb{R}^3$

Hvis vi har *tre* vektorer i $\mathbb{R}^3$ som er lineært uavhengige (dvs. som ikke ligger i samme plan gjennom origo), blir disse en basis for $\mathbb{R}^3$, dvs. de spenner ut hele rommet.

8.4 OPPGAVER

1. La $\mathbf{u} = (2, 3, 5)$ og $\mathbf{v} = (-2, 1, 3)$. Beregn følgende lineærkombinasjoner av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$:

a) $a = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ b) $\mathbf{b} = \mathbf{v} - 3\mathbf{u}$

2. Avgjør om følgende samlinger vektorer i rommet $\mathbb{R}^3$ er lineært avhengige:

a) $(-1, 2, 0)$, $(1, 1, 1)$ og $(0, 1, 1)$

b) $(1, -2, 3)$, $(1, 2, 2)$ og $(-1, 6, -4)$

3. Avgjør om følgende samlinger vektorer i planet $\mathbb{R}^2$ er lineært avhengige:

a) $(-1, 4)$ og $(2, -8)$ b) $(1, 1)$ og $(1, 0)$

4. La $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ og $\mathbf{v} = (0, -2, 3)$.

a) Hva er dimensjonen til underrommet $U \subseteq \mathbb{R}^3$ utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$? Skisser U på en figur.

b) Avgjør ved regning hvorvidt $\mathbf{x} = (3, 2, -1)$ ligger i underrommet $U \subseteq \mathbb{R}^3$ utspent av u og v. Illustrer din konklusjon ved å tegne inn punktet svarende til $\mathbf{x}$ på figuren fra a).

5. Beskriv underrommet $U \subseteq \mathbb{R}^2$ utspent av $\mathbf{a} = (2, -1)$ og $\mathbf{b} = (-4, 2)$. Illustrer U på en figur.

6. I hvert av punktene under skal du finne en basis for underrommet U utspent av de gitte vektorene, og angi dimensjonen til U. Illustrer så U samt et sett basisvektorer for U på en figur, i den grad det lar seg gjøre.

a) $(-2, 4, 19)$, $(1, -2, -1/2)$ og $(4, -8, -2)$

b) $(1, 0, 0)$, $(-2, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ og $(-1, 0, 1)$

c) $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$ og $(0, 0, 1)$

7. La $U \subseteq \mathbb{R}^3$ være mengden av vektorer som har prikkprodukt 0 med vektoren $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$. Begrunn at U er et 2-dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^3$, og finn en basis for U.

8. La $U \subseteq \mathbb{R}^4$ være underrommet utspent av vektorene $(1, -1, 1, -1)$, $(2, 1, 0, 1)$, $(4, -1, 2 - 1)$ og $(0, 0, 0, 1)$. Finn en basis for U.

8.5 OPPGAVER

1. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

definerer en funksjon $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ved at $A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

a) La $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ og $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ være standardbasisvektorene i $\mathbb{R}^2$. Finn $A(\mathbf{e}_1)$ og $A(\mathbf{e}_2)$.

b) Finn en basis for bildet Col A til A. Illustrer bildet til A på en figur. Hva er rangen til matrisen A?

2. I hvert av punktene under er oppgitt en matrise A. Finn i hvert tilfelle n og m slik at matrisen definerer en funksjon $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Finn så en basis for bildet Col A til matrisen. Angi rangen til A. Skisser bildet Col A til A på en figur, i den grad det lar seg gjøre.

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Vis at bildet til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

er et todimensjonalt underrom i $\mathbb{R}^4$. Finn en basis for dette underrommet. Hva er rangen til A?

8.6 Plan

I seksjon 8.4 kalte vi underrommet utspent av to lineært uavhengige vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ for et **plan**. Alle slike plan inneholder nullvektoren $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, altså origo.

Vi skal nå se på en mer generell definisjon av planbegrepet. Den nye definisjonen tillater også plan som ikke går gjennom origo.

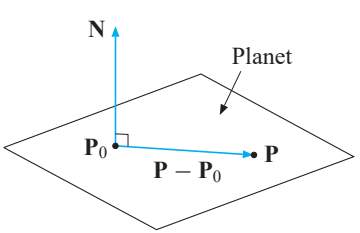
DEFINISJON 1

Plan i $\mathbb{R}^3$

La a, b, c, x_0, y_0, z_0 være gitte reelle tall, der $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$. Mengden av alle punkter (x, y, z) i rommet slik at

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

kalles *planet* gjennom punktet (x_0, y_0, z_0) med **normalvektor** (a, b, c).



Figur 8.6.1 Et plan med en normalvektor **N**

Tolkningen av dette er vist på figur 8.6.1. Hvis $\mathbf{N} = (a, b, c)$, $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ og $\mathbf{P} = (x, y, z)$, så er

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) &= (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \end{aligned}$$

Planet består altså av alle punkter $\mathbf{P}$ slik at $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0$ står vinkelrett på $\mathbf{N}$.

3. La A være en kvadratisk matrise slik at $|A| < 1$, og la I være identitetsmatrisen. For $n \geq 1$, la $S_n = I + A + A^2 + \cdots + A^n$.

a) Vis at $(I - A)S_n = I - A^{n+1}$.

b) Vis at hvis $m > n$, har vi $|(S_m)_{ij} - (S_n)_{ij}| \leq \dfrac{|A|^{n+1}}{1 - |A|}$.

c) Vis at for hver kombinasjon ij er følgen $\{(S_m)_{ij}\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchy-følge. Bruk dette til å vise at det fins en matrise S slik at $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

d) Ved å la $n \to \infty$ i punkt a), vis at $(I - A)S = I$.

e) Vis at matrisen $I - A$ er inverterbar, og at

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \cdots$$

8.13 EKSTRA OPPGAVER TIL KAPITLET

1. Om to vektorer i $\mathbb{R}^n$ vet vi at de begge har lengde 3, og at vinkelen mellom dem er 45°. Finn prikkproduktet av vektorene.

2. Finn ligningen for planet som går gjennom punktet $(0, 2, 3)$ og har $\mathbf{N} = (1, 0, 0)$ som normalvektor. Illustrer på en figur.

3. Hva er ligningen for skjæringslinjen mellom planet $x + 7y - 5z = 12$ og xy-planet?

4. Står vektorene $(1, 1, -1)$ og $(-2, 1, 2)$ normalt på hverandre?

5. Finn vinkelen mellom følgende vektorer:

a) $(7, 2)$ og $(4, 3)$

b) $(1, 1, 1)$ og $(1, 0, 0)$

c) $(1, 1, 1, 1)$ og $(1, 0, 0, 0)$

6. La $\mathbf{a} = (3, 5, 6)$ og $\mathbf{b} = (0, 0, 2)$. Regn ut

a) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ b) $\mathbf{a} + 9\mathbf{b}$ c) $(1/2)\mathbf{b}$

d) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ e) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|$ f) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}|$

7. Finn $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ når

a) $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ og $\mathbf{b} = (2, 2, 2)$

b) $\mathbf{a} = (3, 2, 1)$ og $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$

8. La $P = (2, 2)$ og $Q = (1, 3)$. Beregn arealet av parallellogrammet som har P og Q som to av sine hjørner, dessuten et hjørne i origo.

9. La $P = (2, 2)$ og $Q = (1, 3)$. Beregn arealet av trekanten som har P og Q som to av sine hjørner, og det tredje i origo.

10. Finn ligningen for planet som går gjennom punktet $(1, 2, 0)$ og har

$$\mathbf{N} = (-1, 2, 1)$$

som normalvektor.

11. Sett

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

og sjekk reglene 1–7 fra teorem 8.1.1 ved å regne ut begge sider og se at du får det samme.

12. Begrunn at de tre planene $x + y + z = 1$, $-x + y - z = 0$ og $5x - 17y + 13z = 3$ har nøyaktig ett punkt felles.

13. Finn en basis for bildet til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 & 32 \\ -1 & 1 & 6 & 28 \\ -1 & 2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

(Hint: Eksempel 7.2.2 kan spare deg for litt regning.) Finn alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ slik at

$$M\mathbf{x} = (13, 19, 13)$$

14. *Mer om kattekolonien.* (Denne oppgaven er en fortsettelse av oppgave 7.8.2.) La M være matrisen fra oppgave 7.8.2.

a) Vis at bildet til M er et plan P i $\mathbb{R}^3$, og finn ligningen for P. Tolk ligningen biologisk.

b) La L være mengden av punkter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ som løser ligningssystemet fra punkt b) i oppgave 7.8.2. Beregn

$$L \cap P,$$

dvs. snittet mellom L og bildet til M. Hva er den biologiske tolkningen av dette snittet?

15. La a være et reelt tall, og la M være en $n \times n$-matrise. Vis at hvis $\mathbf{x}$ er en egenvektor for M med egenverdi λ, så er $\mathbf{x}$ en egenvektor for matrisen

$$aM$$

også, med egenverdi $a\lambda$.

16. I denne oppgaven skal vi sjekke at alle underrom i $\mathbb{R}^n$ har en basis. Dessuten skal vi bevise teorem 8.4.3. I resonnementene har du lov til å bruke alle resultater frem til og med teorem 8.4.2, samt definisjonen av basis.

a) Vis at hvis U er et k-dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^n$, så fins det k *lineært uavhengige* vektorer som spenner ut U. Med andre ord: Alle underrom U har en basis.

b) Vis teorem 8.4.3. Hint: La k være dimensjonen til U og V. Ved a) fins det k lineært uavhengige vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ som spenner ut U. Anta at det fins en vektor $\mathbf{x} \in V$ slik at $\mathbf{x} \notin U$. Vil ikke samlingen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{x}\}$ da måtte være lineært uavhengig, mon tro? Hva får du ut av dette?

17. Finn matrisen som representerer den gitte avbildningen i $\mathbb{R}^2$.

a) Speiling om x-aksen.

b) Speiling om y-aksen.

c) Speiling om linjen $y = x$.

d) Rotasjon en vinkel θ mot klokken. Hint: Gjør som vanlig, dvs. se hva standardbasisvektorene må avbildes på. Dermed får du søylene i matrisen.

18. *Eksentrisiteten til kjeglesnitt.* Kikk på hjelpefigurene nederst side 372, med referanse videre til standardligningene i boksen side 369. For ellipser og hyperbler definerer vi *eksentrisiteten* e ved

$$e = c/a.$$

Eksentrisiteten til parabler defineres som $e = 1$.

a) Begrunn at for ellipser er $e \in [0, 1)$, der $e = 0$ tilsvarer en sirkel. Begrunn også at for hyperbler er $e > 1$.

b) Finn eksentrisiteten til disse tre ellipsene:

$(x^2/4) + y^2 = 1$

$x^2 + (y^2/16) = 1$

$x^2 + y^2 = 1$

Tegn disse ellipsene. Hvordan kan du tolke eksentrisiteten til en ellipse geometrisk?

c) Finn eksentrisiteten til kurven $x^2 - y^2 = 1$.

19. Fra mekanikkens ligninger kan man utlede at objektene som går i bane rundt solen, beveger seg i ellipseformede baner med solen i det ene brennpunktet. Jordbanen har eksentrisitet $e \approx 0.0167$, og Plutos bane har eksentrisitet $e \approx 0.249$. Banen til kometen Kohoutek har derimot eksentrisitet $e \approx 0.99993$. Finn forholdet a/b mellom største og minste halvakse for banene til Jorden, Pluto og Kohoutek. Skisser formen på ellipsene, med solens posisjon i det ene brennpunktet.

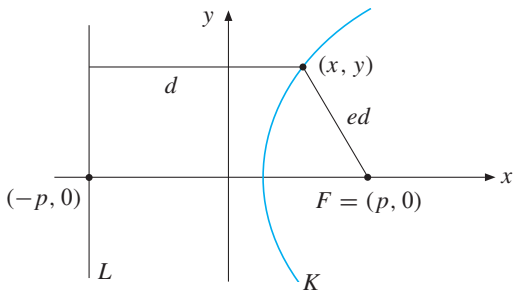
20. *En alternativ geometrisk beskrivelse av kjeglesnittene.* La $p > 0$ være et reelt tall, og F være punktet $F = (p, 0)$ i planet, og la L være den rette linjen med ligning

$$x = -p$$

La så kurven K være mengden av punkter (x, y) i planet slik at

$$(\text{avstanden til } F) = e \cdot (\text{avstanden til } L)$$

Se figur 8.13.1.



Figur 8.13.1 Kurven K

Vi skal i denne oppgaven se at kurven K blir et kjeglesnitt med eksentrisitet e og brennpunkt F. Med andre ord:

- Hvis $e < 1$, får vi en ellipse
- Hvis $e = 1$, får vi en parabel
- Hvis $e > 1$, får vi en hyperbel

Linjen L kalles *styrelinjen* til kjeglesnittet K.

a) Vis at kravet for at (x, y) skal ligge på kurven K, kan skrives

$$x^2(1 - e^2) - 2p(1 + e^2)x + y^2 = -p^2(1 - e^2)$$

b) Vis at hvis

$$e = 1$$

så er K en parabel med brennpunkt F. Angi ligningen til K.

c) Anta nå $e \neq 1$, og døp

$$h = p \cdot \frac{1 + e^2}{1 - e^2}$$

Vis at ligningen fra punkt a) da kan skrives

$$x^2 + 2xh + h^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = -p^2 + h^2$$

La så

$$a^2 = -p^2 + h^2$$

Vis at ligningen for K da kan skrives

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

d) Vis at hvis $e < 1$, blir K en ellipse med eksentrisitet e og brennpunkt F.

e) Vis at hvis $e > 1$, blir K en hyperbel med eksentrisitet e og brennpunkt F.

21. La A være en $m \times n$-matrise. Med **nullrommet** Nul A til A menes mengden

$$\text{Nul } A \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Med **radrommet** Row A til A menes underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av radvektorene (linjevektorene) i matrisen A.

a) Forklar at Row $A = \text{Col}\,(A^{\mathrm{T}})$.

b) Forklar at Nul A kan beskrives som løsningsmengden til det homogene ligningssystemet med koeffisientmatrise A.

c) Forklar at Nul A kan beskrives som mengden av alle $\mathbf{x}$ slik at $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, der $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er lineærtransformasjonen definert av matrisen A.

d) Vis at Nul A er et underrom av $\mathbb{R}^m$.

e) Vis at $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ oppfyller $A\mathbf{x} = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{x}$ står normalt på alle radvektorene i A.

f) Begrunn at hvis du bruker Gauss–Jordan-metoden på A, så vil radvektorene i den reduserte trappeformen til A som inneholder et pivotelement, utgjøre en basis for radrommet til opprinnelige matrisen A. (Hint: Se på hver av de tre Gauss-operasjonene separat. Ingen av dem kan endre underrommet som spennes ut av radene i matrisen.)

g) Begrunn at

$$\dim(\text{Row } A) = \dim(\text{Col } A) = \text{rank } A$$

Hint: Begge dimensjonene blir lik antall pivotelemeter i den reduserte trappeformen til A.

h) Begrunn at

$$\dim(\text{Nul } A) + \dim(\text{Row } A) = m$$

Hint: Dimensjonen til Nul A blir antall søyler i den reduserte trappeformen til A som ikke innholder et pivotelement.

22. (Eksamen MAT1120 UiO høst 2021) Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 9 & 15 & 8 \\ 1 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn en basis for Col A. Finn også en basis for Nul A.

23. I teksten har vi vist at en determinant kan regnes ut ved å løse opp etter første rad eller etter første søyle. Dette resultatet kan generaliseres; det viser seg at man kan regne ut en determinant ved å løse opp etter en *vilkårlig* rad eller søyle. I denne oppgaven er det meningen at du skal forske deg frem til en presis formulering av dette resultatet samt finne en begrunnelse for det.

a) Sett opp en (4×4)-determinant D med ukjente elementer A_{ij}. Hva skjer med determinanten D hvis vi bytter 1. og 2. rad?

b) La D' være determinanten D med 1. og 2 . rad byttet. Løs opp D' etter 1. rad. Se på underdeterminantene du får. Hvordan henger disse sammen med underdeterminantene du hadde fått hvis du hadde løst opp D etter 2. rad ved å stryke raden og søylen hvert tall er med i?

c) Formuler ut fra punkt b) et resultat om hvordan man kan løse opp en determinant etter 2. rad.

d) Start nå med D igjen, og bytt 1. og 3. rad. Undersøk hva som skjer nå. Hva blir regelen for oppløsning etter 3. rad?

e) Formuler et generelt resultat om oppløsning av en determinant etter n-te rad.

f) Bruk et analogt resonnement til å formulere et generelt resultat om oppløsning av en determinant etter n-te søyle.

12.1 OPPGAVER

1. Avgjør om den gitte funksjonsmengden er et vektorrom når vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon foregår etter de vanlige reglene $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ og $(rf)(x) = rf(x)$. Hvis mengden ikke er et vektorrom, så oppgi hvilke aksiomer som ikke holder.

a) Mengden av alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som oppfyller $f(5) = 0$.

b) Mengden av alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som oppfyller $f(5) = 1$.

c) Mengden av alle polynomer med grad nøyaktig 3.

d) Mengden av alle kontinuerlige funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

e) Mengden av alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ikke er kontinuerlige.

f) Mengden av alle deriverbare funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som oppfyller $f(0) = f'(0) = 0$.

g) Mengden av alle begrensede funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

h) Mengden av alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er løsninger av differensialligningen $y'' + 13y' + 5y = 0$ på hele $\mathbb{R}$.

i) Mengden av alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er løsninger av differensialligningen $y'' + 13y' + 5y = 1$ på hele $\mathbb{R}$.

2. La U være mengden av alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ som er på formen $(a+b, 2a, b)$, der $a, b \in \mathbb{R}$. Finn vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ slik at $U = \text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Vis at U er et underrom av $\mathbb{R}^3$. Hva er dimensjonen til U?

3. La $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Vis at $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \mathbb{R}^3$ hvis og bare hvis matrisen med $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ som søyler har determinant forskjellig fra 0.

4. La V være vektorrommet av alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på den vanlige måten. La f og g være funksjonene gitt ved $f(x) = \sin x$ og $g(x) = \cos x$. Vis at $\text{Span}\{f, g\}$ er et underrom av V, og finn $\dim U$.

5. Avgjør om mengden $\mathbb{R}^2$ blir et vektorrom hvis vi utstyrer den med de oppgitte alternative definisjonene av vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon. Hvis mengden ikke er et vektorrom, så oppgi hvilke aksiomer som ikke holder.

a) $(x, y) + (z, w) = (x+z, y+w)$ og $r(x, y) = (rx, 0)$

b) $(x, y) + (z, w) = (x+w, y+z)$ og $r(x, y) = (rx, ry)$

c) $(x, y) + (z, w) = (2x+2z, 2y+2w)$ og $r(x, y) = (rx, ry)$

6. La K være første kvadrant i $\mathbb{R}^3$, altså mengden av alle $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ slik at $v_j \geq 0$ for $j = 1, 2, 3$. Vis at dersom $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K$, så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in K$. Er V et underrom av $\mathbb{R}^3$?

7. La $P \subseteq \mathbb{P}_\infty$ være mengden av alle polynomer av grad 4 eller mindre som har heltallige koeffisienter. Er P et underrom av $\mathbb{P}_\infty$?

8. Avgjør om den gitte matrisemengden er et vektorrom når vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon defineres som henholdsvis vanlig matriseaddisjon og vanlig multiplikasjon av skalar med matrise. Hvis mengden ikke er et vektorrom, så oppgi hvilke aksiomer som ikke holder.

a) Mengden av alle (2×2)-matriser.

b) Mengden av alle $(m \times n)$-matriser, der m og n er gitte naturlige tall.

c) Mengden av alle invertible (3×3)-matriser.

d) Mengden av alle (3×3)-matriser som har determinant 0.

e) Mengden av alle (2×2)-matriser som har minst én reell egenverdi.

f) Mengden av alle såkalte *nullpotente* (2×2)-matriser, dvs. (2×2)-matriser M som oppfyller $M^n = 0$ for minst ett naturlig tall n.

9. I denne oppgaven skal vi bevise punkt 2–6 fra teorem 12.1.1. La V være et vektorrom.

a) Vis at hvis $\mathbf{v} \in V$ er gitt, så har ligningen $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ den unike løsningen $\mathbf{x} = -\mathbf{v}$ i vektorrommet V.

b) Vis at hvis $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er vektorer i V slik at $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, så er $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

c) Vis at for alle vektorer $\mathbf{v} \in V$ gjelder at $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

d) Vis at for alle skalarer $r \in \mathbb{R}$ gjelder at $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

e) Vis at for alle $r \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{v} \in V$ gjelder at $(-r)\mathbf{v} = r(-\mathbf{v}) = -(r\mathbf{v})$.

10. Vis at samlingen

$$S = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$$

er en basis for vektorrommet $\mathbb{P}_n$ av polynomer med grad n eller lavere. (Se eksempel 12.1.3.) Hva er dimensjonen til vektorrommet $\mathbb{P}_n$?

11. I denne oppgaven skal vi studere vektorrommet $\mathbb{P}_\infty$ fra eksempel 12.1.4.

a) Vis at samlingen

$$S = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$$

er en basis for $\mathbb{P}_\infty$.

b) Vis at $\mathbb{P}_\infty$ er et uendeligdimensjonalt vektorrom.

12. La M være mengden bestående av katten Sushi. Mengden M har altså ett element. Vi definerer vektorromsoperasjoner på M ved å si at Sushi + Sushi = Sushi, og $r \cdot$ Sushi = Sushi for alle reelle tall r. Avgjør om mengden M blir et vektorrom med disse operasjonene.

13. Avgjør om den gitte delmengden U er et underrom av det gitte vektorrommet V.

a) V er rommet $\mathbb{P}_\infty$ av alle polynomer, og U er mengden $\mathbb{P}_4$ av polynomer med grad høyst 4.

b) V er rommet $\mathbb{P}_\infty$ av alle polynomer, og U er mengden bestående av nullpolynomet samt alle polynomer av grad 2 eller høyere.

c) V er rommet $\mathbb{P}_\infty$ av alle polynomer, og U er mengden bestående av alle polynomer av grad enten 0 eller minst 3.

d) $V = \mathbb{R}^2$, og U er mengden av punkter (x, y) som oppfyller $y = 2x$.

e) $V = \mathbb{R}^2$, og U er mengden av punkter (x, y) som oppfyller $y = 2x + 1$.

14. La $\mathbb{P}_\infty$ være vektorrommet av alle polynomer. Vis at

$$\text{Span}\{x + 1, x^2\} = \text{Span}\{x^2 - 3x - 3, x^2 + x + 1\}$$

Hint: Vis at hvis et polynom kan skrives som en lineærkombinasjon av $x + 1$ og x^2, så kan det også skrives som en lineærkombinasjon av $x^2 - 3x - 3$ og $x^2 + x + 1$. Resonner så motsatt vei.

15. Avgjør om følgende samlinger av funksjoner i rommet $\mathbb{P}_\infty$ er lineært avhengige.

a) $\{x, x^2 - 2x + 1, x^2\}$

b) $\{x^4, x^3, x^2 + x^3 + x^4\}$

16. La $\mathbb{P}_3$ være vektorrommet av polynomer med grad høyst 3. Finn en basis for $\mathbb{P}_3$ der polynomene $p(x) = x + x^2 + x^3$ og $q(x) = x$ inngår.

17. La V være et vektorrom, og la U_1 og U_2 være to underrom av U. Avgjør i hvert tilfelle om den gitte mengden er et underrom av vektorrommet V.

a) Snittet $U_1 \cap U_2$ av U_1 og U_2

b) Unionen $U_1 \cup U_2$ av U_1 og U_2

c) Summen $U_1 + U_2$, altså mengden av alle $\mathbf{v} \in V$ slik at $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, der $\mathbf{a} \in U_1$ og $\mathbf{b} \in U_2$

12.2 Lineærtransformasjoner

I denne seksjonen skal vi generalisere begrepet **lineærtransformasjon** introdusert i seksjon 8.5 til generelle vektorrom, og studere egenskapene til slike transformasjoner. Transformasjonene i seksjon 8.5 gikk fra vektorrommet $V = \mathbb{R}^n$ til vektorrommet $W = \mathbb{R}^m$, og var definert ved matriser.

Vi generaliserer definisjonen ved å ta utgangspunkt i to egenskaper som våre matrisedefinerte transformasjoner har.

DEFINISJON 1

Lineærtransformasjoner

Med en **lineærtransformasjon** fra et vektorrom V til et vektorrom W menes en funksjon $T : V \to W$ som oppfyller de to kravene

L1 $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

L2 $T(r\mathbf{u}) = r \cdot T(\mathbf{u})$

for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og alle skalarer $r \in \mathbb{R}$.

Det er viktig å tenke gjennom kravene som definisjonen stiller til T. Vektoren