3. Matrisen

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

er på redusert trappeform, for igjen har vi en trapp med 0 over *pivot-elementene*. Merk at det ene trinnet i trappen er blitt to hakk langt. Oversettelse til ligningssystem gir (siste ligning sier $0 = 0$)

$$\begin{cases} x_1 = -1 + x_3 - x_5 \\ x_2 = -1 - 5x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 2 - 3x_5 \end{cases} \qquad \text{etc. } (x_3 \text{ og } x_5 \text{ er frie parametre})$$

Hvorfor er Gauss-eliminasjon en korrekt metode?

Ingen av de tre operasjonene øverst på side 300 påvirker løsningsmengden til ligningssystemet. At operasjon 2 og 3 er ufarlige i så henseende, er greit. Operasjon 1 virker skumlere, men det den går ut på, er egentlig bare å **legge til det samme på begge sider** av en ligning. For ligningssystemet sier jo at de to sidene i den ligningen vi legger til, *er* like! Om vi ganger den med et tall før vi legger til, spiller ingen rolle.

Siden alle de tre operasjonene i Gauss–Jordan-metoden altså er uskyldige, har ligningssystemet vi leser av fra den radreduserte matrisen nøyaktig de samme løsningene som det opprinnelige systemet. Tenk som så at det vi kan se fra den reduserte formen, er **hvilke krav ligningssystemet egentlig stiller**.

7.2 OPPGAVER

1. Finn den generelle løsningen av ligningssystemene under, og angi løsningsmengdens dimensjon i hvert tilfelle.

a) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - y + 2z = 3 \\ -2x + 3y - z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 9x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 4x + 5y + z = 0 \end{cases}$

2. Bestem generell løsning av ligningssystemene under, og angi også løsningsmengdens dimensjon i hvert tilfelle.

a) $\begin{cases} 3x - y = 14 \\ x + y = 6 \\ 5x + y = 26 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -5x_1 - 25x_2 + 5x_3 - 4x_5 = -13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + 15x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + 4z = 3 \\ -x - 2z = -3 \\ 2x + y + 6z = 6 \\ 3x + 5y + 16z = 9 \\ -2x - y - 6z = -6 \end{cases}$

Elementene i en matrise. Diagonale matriser

Tallene i en matrise kalles **elementene** i matrisen. Hvis A er en matrise, lar man A_{ij} bety elementet som står i rad i og søyle j i matrisen A. Hvis A er en (3×3)-matrise, har vi altså for eksempel

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Hvis

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

så er $M_{11} = 0$, $M_{12} = 1$, $N_{21} = 0$ og $N_{22} = -6$. Hvis A er en $m \times n$-matrise, har vi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

En kvadratisk matrise A kalles **diagonal** hvis $A_{ij} = 0$ for all $i \neq j$. I en diagonal matrise er det altså kun tallene $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}$ nedover diagonalen fra øvre venstre hjørne til nedre høyre hjørne som kan være ulik 0. Matrisen N er et eksempel på en diagonal (2×2)-matrise.

7.3 OPPGAVER

1. Beregn determinantene

a) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

2. Beregn determinantene

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 7 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

3. Beregn determinanten $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. Gitt ligningssystemet $\begin{cases} 4x + 7y + z = -3 \\ -2x - 17y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 3 \end{cases}$

a) Er systemet homogent eller inhomogent?

b) Finn systemets koeffisientmatrise og dens determinant D.

c) Bestem antall løsninger av ligningssystemet, dvs. antall kombinasjoner (x, y, z) som tilfredsstiller ligningene.

5. Bestem antall løsninger av ligningssystemene

a) $\begin{cases} 3x - 5y + z = 1 \\ -x - y - z = 0 \\ 7x + z = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2r + 5s + 3t = 0 \\ 6r + 3s - 3t = 0 \\ -r + 4s + 5t = 0 \end{cases}$

6. Hvor mange løsninger har ligningssystemet

$$\begin{cases} y + z = 3 - 3z \\ -x + y - z - 1 = 0 \\ z - 1 = x + y \end{cases}$$

7. La a være et gitt reelt tall, og betrakt ligningssystemet (med ukjente x, y og z) gitt ved

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ -x + a^2 y = -2 \\ -x + y + az = 0 \end{cases}$$

a) Finn systemets koeffisientmatrise og dens determinant D.

b) For hvilke verdier av a er $D = 0$?

c) Avgjør hvor mange løsninger systemet har for forskjellige gitte verdier av tallet a. (Hint: Tilfellene der $D = 0$, må sjekkes manuelt.)

determinanten har *samme verdi* som den gamle. Gjør så operasjon (2) på de to nederste radene. Pga. induksjonshypotesen vil dette ha null effekt på verdien av $(n+1)\times(n+1)$-determinanten, siden ingen av $(n\times n)$-determinantene vi får å gange med ved oppløsning etter første rad, endres. Første rad endres heller ikke. Bytt så tilbake.

(3) Ved et visst antall ombytter kan vi plassere raden som skal ganges med k som første rad. Denne byttingen medfører høyst et fortegnsskifte, og når vi så ganger første rad med k, er det opplagt at hele determinanten ganges med k også. (Oppløsning etter 1. rad.) Til slutt bytter vi den multipliserte raden tilbake på plass, og får da fortegnsskifte hvis og bare hvis vi fikk det da vi byttet den andre veien. Totalt blir det dermed ikke noe fortegnsskifte. ■

EKSEMPEL 2 Radreduksjon gir (i første overgang byttes rad 1 og 3)

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +1\cdot \mathrm{I} \\ -2\cdot \mathrm{I} \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \; +2\cdot \mathrm{II}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot 1 = -3 \quad ■$$

Bevis for teorem 7.3.1

La oss til slutt begrunne teorem 7.3.1. Hvis et ligningssystem med n ligninger og n ukjente har entydig løsning, betyr det at koeffisientmatrisen M kan gausses ned til en matrise som har bare 1-ere langs diagonalen, og nuller ellers. Determinanten til en slik redusert matrise er 1, dvs. ikke 0. Men dermed kan ikke $\det(M)$ være 0 heller, for ved teorem 7.4.2 kan ingen Gauss-operasjon endre en determinant som er 0 til en som *ikke* er 0. Omvendt, hvis systemet ikke har en entydig løsning, må det bety at koeffisientmatrisen M kan gausses over til en matrise som har en ren nullrad. Og determinanten til en matrise med en nullrad er opplagt 0. Ved teorem 7.4.2 må da $\det(M)=0$.

7.4 OPPGAVER

1. Finn determinantene fra oppgave 2 og 3 til forrige delkapittel først ved oppløsning etter første søyle, og så ved radreduksjon.

2. Når du beregner en determinant ved radreduksjon, trenger du egentlig ikke skaffe nuller *over* pivotene. Forklar hvorfor.

Anta nå at vi trinnvis gausser oss tilbake fra D til A og oppdaterer D i ligning (1) underveis. For hver Gauss-operasjon som gjøres på D, vil da akkurat samme Gauss-operasjon bli gjort på DB. Dermed vil $\det(D)$ og $\det(DB)$ endres på samme måte under alle disse operasjonene, dvs. når venstre side i (1) skifter fortegn, ganges med et tall eller er uforandret, vil også høyre side lide samme skjebne. Dermed beholder vi likheten (1) tilbake til starten, der D er blitt A. ■

Litt notasjon til slutt: Hvis $n \geq 1$ er et helt tall, skriver vi

$$A^n$$

for matriser akkurat som for tall. Altså $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$ og så videre. Det er kun for kvadratiske matriser dette er definert.

7.5 OPPGAVER

1. La matrisene A, B og C være gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Angi hvilket $(m \times n)$-format de tre matrisene er av.

b) Avgjør hvilke av produktene

$$AB,\ BA,\ AC,\ CA,\ BC \text{ og } CB$$

som ikke er definert, og finn de produktene som *er* definert.

c) Beregn matrisen $M = A^2 + 7A$.

2. La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Regn ut AB og BA.

b) Regn ut matrisen $3A - 5B + A^2$.

3. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn A^2 og A^3.

b) Finn et uttrykk for A^n, for heltallig $n \geq 1$.

4. En (2×3)-matrise A er definert ved at elementet A_{ij} i rad i og søyle j er gitt ved

$$A_{ij} = i^2 - 2j$$

Finn matrisen A.

5. La

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 17 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Regn ut produktene AI og IA.

b) Vis at hvis

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er en vilkårlig (2×2)-matrise, så er

$$MI = IM = M$$

6. Ved å la deg inspirere av oppgave 5, finn en (3×3)-matrise I som er slik at hvis

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

er en vilkårlig (3×3)-matrise, så er

$$MI = IM = M$$

7. Regn ut matriseproduktet

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

BEVIS

(1) La som vanlig A_{ij} være elementet i rad i og søyle j i matrisen A. Da er $(A^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji}$ for alle i, j. Videre er

$$[(AB)^{\mathrm{T}}]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_r A_{jr}B_{ri} = \sum_r (A^{\mathrm{T}})_{rj}(B^{\mathrm{T}})_{ir} = [B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}]_{ij}$$

(2) Hvis A^{-1} fins, gir (1) at $(A^{-1})^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}} = I$. Ved oppgave 7.9.11 har vi dermed også $A^{\mathrm{T}} \cdot (A^{-1})^{\mathrm{T}} = I$. Altså $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

(3) Kort fortalt er poenget her bare at beregning av $\det(A^{\mathrm{T}})$ ved oppløsning etter første *rad* gir eksakt samme regning som beregning av $\det(A)$ ved oppløsning etter første *søyle*. Resultatet følger så fra teorem 7.4.1.

Formelt kan vi bruke induksjon. Resultatet holder for (2×2)-matriser. I induksjonssteget løser vi opp $\det(A)$ etter første rad og $\det(A^{\mathrm{T}})$ etter første søyle. Vi har $(A^{\mathrm{T}})_{j1} = A_{1j}$, og ved (1) og (2) i beviset for teorem 7.4.1 er underdeterminantene disse multipliseres med i sine respektive oppløsninger, transponerte av hverandre (husk at $(A^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji}$). Ved induksjonshypotesen er disse underdeterminantene like, og resultatet følger. ■

7.6 OPPGAVER

1. Avgjør om følgende matriser er inverterbare, og finn eventuelt deres inverse.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

2. Vis at matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

er inverterbar, dvs. at den har en invers matrise.

3. Finn den inverse til følgende matrise, og sjekk svaret ved å vise at $M \cdot M^{-1}$ er lik identitetsmatrisen.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Finn de transponerte til matrisene i oppgave 1 samt matrisene i oppgave 1 til seksjon 7.5.

5. Vis at hvis A og B er inverterbare $n \times n$-matriser, så er også matrisen AB inverterbar og

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

6. Bevis følgende. I a) antas at A er inverterbar.

a) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

b) $\det(A^n) = (\det A)^n$ for alle hele tall $n \geq 1$

7. Mamma er like gammel som sine døtre Stine og Trine til sammen. For 21 år siden var hun imidlertid *fire* ganger så gammel som de to var til sammen. For 18 år siden var dessuten mamma og Stine til sammen 10 ganger så gamle som Trine. Vis at hvis alderen til mamma, Stine og Trine er henholdsvis x, y og z, så vil disse størrelsene oppfylle et lineært ligningssystem med matrisen M fra oppgave 2 som koeffisientmatrise. Finn M^{-1}, og bestem alderen til de tre.

8. La λ være et reelt tall. Beregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -10 \\ -10 & 23-\lambda \end{vmatrix}$$

For hvilke verdier av λ har matriseligningen

$$\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -10 & 23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

andre vektorer enn bare $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ som løsning?

Til slutt et teorem som vi skal få bruk for i neste seksjon.

TEOREM 1

Egenvektorer for potenser av matriser

Hvis $\mathbf{x}$ er en egenvektor for matrisen M med egenverdi λ, så har vi

$$M^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$$

Så $\mathbf{x}$ blir en egenvektor for matrisen M^n også, med egenverdi λ^n.

BEVIS Poenget er at å multiplisere vektoren $\mathbf{x}$ med matrisen $M^n = M \cdots M$ er det samme som å multiplisere vektoren med matrisen M om igjen og om igjen n ganger. For hver gang blir vektoren ganget med λ, siden den er en egenvektor for M. Totalt blir den derfor ganget med λ^n. For $n = 2$ ser det slik ut, i absolutt full detalj:

$$\begin{aligned} M^2\mathbf{x} &= (MM)\mathbf{x} = M(M\mathbf{x}) = M(\lambda\mathbf{x}) \\ &= \lambda(M\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x} \end{aligned}$$

I tredje siste overgang brukte vi regneregel 7 fra teorem 7.5.1. Tilsvarende for høyere n-verdier (induksjon, om du vil). ■

7.7 OPPGAVER

1. Vis, ved å regne ut produktet $A\mathbf{x}$, at vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hva er den tilhørende egenverdien? (NB: Det er *ikke* nødvendig å finne alle egenverdiene til A.)

2. Finn egenverdier og egenvektorer for

a) $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. Finn egenverdier og egenvektorer for

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

4. Finn egenverdier og egenvektorer for

$$M = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -4 & -6 & -8 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(Hint: Matrisen har heltallige egenverdier.)

5. Finn egenverdier og egenvektorer for

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

7.8 OPPGAVER

1. Indremisjonen har begynt med undervisning i matematikk på sitt kurssted i Myrkdalen på Vestlandet. Her er festing uaktuelt, og studentene kan bare være i to tilstander: Enten leser de, eller så sover de. Følgende regler gjelder:

- Hvis en student leser i dag, er det helt sikkert at vedkommende sover i morgen.
- Dersom en student sover i dag, er sannsynligheten 50 % for at studenten sover i morgen også, og 50 % for at vedkommende da leser.

La x_n og y_n være hhv. antall studenter som leser og sover ved tid $t = n$, der tiden måles i dager.

a) Sett opp overgangsmatrisen M slik at

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \text{for } n \geq 0$$

b) Anta at det er 300 studenter på kurset totalt, og at samtlige leser første dag (ved $t = 0$). Finn tilstandsvektoren neste dag ($t = 1$) og dagen etter det igjen ($t = 2$).

c) Vis at overgangsmatrisen M er inverterbar, og finn M^{-1}. Anta at tilstanden i dag er at 85 studenter leser og 215 studenter sover. Hva var da tilstandsvektoren to dager før?

d) Finn en matrise A slik at man regner seg fire dager frem i tiden ved å gange med A.

e) Anta igjen at tilstanden ved $t = 0$ er at samtlige studenter leser. Finn tilstandsvektoren ved tid $t = n$. Vis at studentmassen etter som tiden går, vil nærme seg en tilstand der to tredjedeler til enhver tid sover.

2. *Kattekolonien, forts. fra oppgave 5.7.3*

Stine er fremdeles litt sur fordi Trine uttalte seg så nedsettende om den fine tre-modellen hennes, og vil gjerne ha revansj. Hun vil angripe Trines modell der den er svakest, nemlig i anslaget for k. Hun mener Trines resonnement her ikke holder, fordi det må ha noe å si *når i livet* hunnkattene får ungene sine. (Forfatteren av denne boken støtter for øvrig dette syn.) Stine lanserer derfor en modell der kattene er delt inn i tre aldersgrupper:

x_n : antall hunnkattunger ved tid $t = n$ år
y_n : antall voksne hunnkatter ved tid $t = n$ år
z_n : antall gamle hunnkatter ved tid $t = n$ år.

Stine antar at alle kattene lever i nøyaktig tre år, hvorav de er kattunger første året, voksne andre året og gamle tredje året. Videre antar hun at kattene kun får unger når de er i den midterste aldersgruppen, dvs. voksen-gruppen. Siden hver hunnkatt får 4 unger i løpet av hele sitt liv, blir det dermed slik at hver hunnkatt får fire unger i løpet av sin tid i midterste aldersgruppe. Så hver voksen hunnkatt gir opphav til 4 nye kattunger neste år.

a) Finn x_{n+1}, y_{n+1} og z_{n+1} uttrykt ved x_n, y_n og z_n, og bruk dette til å bestemme en matrise M slik at

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \qquad \text{for } n \geq 0$$

b) Er matrisen M inverterbar? Finn generell løsning av ligningssystemet

$$M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 6 \end{bmatrix}$$

c) Anta at kolonien på et gitt tidspunkt har 24 hunnkattunger, 20 voksne hunnkatter og 6 gamle hunnkatter. Er det ut fra dette mulig å si med sikkerhet hva tilstandsvektoren var ett år før? Hva er eventuelt usikkert?

d) Finn egenverdier og egenvektorer til M. Du vil blant annet finne at vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for M med egenverdi 0. Hva betyr dette biologisk?

e) Det er i utgangspunktet (dvs. ved $t = 0$) tolv hunnkattunger og to voksne hunnkatter i kolonien. Finn en formel for tilstanden etter $t = n$ år. Hva er tilstandsvektoren ved $t = 8$?

f) Hvis du regnet riktig under e), fikk du at totalt antall hunnkatter ved $t = 8$ år er 4352. Totalt antall ved $t = 0$ var 14 katter, akkurat som i punkt b), oppgave 3 s. 196. Hvilken verdi får du for konstanten k dersom du antar at $N(0) = 14$ og $N(8) = 4352$ i Trines modell fra punkt b) i oppgave 5.7.3?

3. Finn en matrise P som diagonaliserer matrisen M fra oppgave 7.8.1, dvs. som er slik at

$$M = PDP^{-1}$$

der D er en diagonal matrise. Finn også den tilsvarende matrisen D, og sjekk ved utregning at matriseproduktet PDP^{-1} blir lik M.

7.9 EKSTRA OPPGAVER TIL KAPITLET

1. Billettprisen til den faste samlingen på det sterkt statsstøttede Museet for moderne kunst i Krokdal er kr 105/80/55 for henholdsvis voksne, studenter og barn. Museet har også en midlertidig utstilling uten studentrabatt. Inngangsprisen til denne er kr 73 for voksne/studenter og kr 49 for barn. I sesongen 2022 hadde museet totalt 35 besøkende. Alle disse betalte inngangsbillett både til den faste samlingen og til den midlertidige utstillingen. Museets totalte billettinntekter for 2022 var kr 2900 fra den faste samlingen og kr 2291 fra den midlertidige utstillingen. En dag finner museets direktør ut at det i søknaden for statsstøtte for år 2024 ville ta seg bra ut å oppgi hvor mange voksne, studenter og barn som besøkte museet i 2022. Disse antallene er imidlertid ikke registrert. Direktøren spør deg om du kan regne dem ut. Er dette mulig? (Du trenger ikke *finne* tallene, bare avgjøre om de lar seg finne.)

2. La a være et reelt tall. Avgjør for hvilke verdier av a determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 4-a & 4-a & 0 \\ a^2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

er lik null. Finnes det en verdi av a som er slik at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 + 7x_4 &= 3 \\ (4-a)x_1 + (4-a)x_2 + (4-a)x_4 &= 5 \\ a^2x_1 + x_2 + 3x_3 + 19x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(med ukjente x_1, x_2, x_3 og x_4) ikke er selvmotsigende? Begrunn svaret.

3. Løs ligningssystemene

a) $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$

4. Løs ligningssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = -1 \\ y + 5z = 11 \end{cases}$$

5. Beregn determinantene ved å løse opp etter første rad.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

6. Beregn determinantene i forrige oppgave ved å løse opp etter første søyle.

7. Beregn determinantene i forrige oppgave ved radreduksjon.

8. Bestem antall løsninger av ligningssystemene:

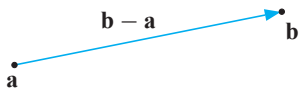
a) $\begin{cases} x - 5y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ 3x - 5y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

9. Vis at hvis M er en kvadratisk matrise, så har M og M^{T} de samme egenverdiene.

10. Lag et eksempel som viser at selv om en kvadratisk matrise M har de samme egenverdiene som sin transponerte matrise M^{T}, så trenger ikke M og M^{T} ha de samme egenvektorene.

11. Vis at hvis A og B er kvadratiske matriser slik at $AB = I$, så er $BA = I$ også. (Hint: Siden $AB = I$, gir produktregelen for determinanter at A og B har determinanter ulik 0. Metoden i teorem 7.6.2 gir da en matrise C slik at $BC = I$. Multipliser ligningen $AB = I$ med C fra høyre på begge sider.)

Avstand



Figur 8.1.9 Avstanden mellom **a** og **a** er $|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$

Hvis $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ og $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ er to punkter i $\mathbb{R}^n$, så starter pilen til $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ i punktet **a** og ender i **b**. Se figur 8.1.9. Derfor kaller man $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ for *vektoren fra* **a** *til* **b**. Lengden

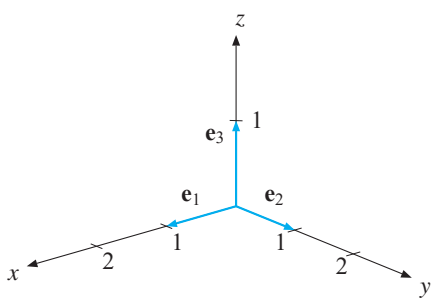
$$|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$$

kalles **avstanden** mellom punktene **a** og **b**.

EKSEMPEL 2 Avstanden fra punktet $\mathbf{a}=(1,3)$ til puntet $\mathbf{b}=(7,10)$ er

$$|\mathbf{b}-\mathbf{a}|=|(6,7)|=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{85}. \quad \blacksquare$$

Standardbasisvektorene



Figur 8.1.10 De tre standardbasis-vektorene i $\mathbb{R}^3$

Standardbasisvektorene i $\mathbb{R}^n$ er vektorene

$$\mathbf{e}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (1,0,\ldots,0), \quad \mathbf{e}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (0,1,\ldots,0) \quad ,\ldots, \quad \mathbf{e}_n \stackrel{\text{def}}{=} (0,\ldots,0,1)$$

For eksempel er $\mathbf{e}_1=(1,0)$ og $\mathbf{e}_2=(0,1)$ standardbasisvektorene i $\mathbb{R}^2$, mens standardbasisvektorene i $\mathbb{R}^3$ er

$$\mathbf{e}_1=(1,0,0), \quad \mathbf{e}_2=(0,1,0), \quad \mathbf{e}_3=(0,0,1)$$

Disse tre vektorene er vist på figur 8.1.10. De peker ut fra origo langs hver sin akse. Merk at enhver vektor $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ kan skrives

$$(a,b)=a(1,0)+b(0,1)=a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2$$

I tilfellet $\mathbb{R}^3$ fås tilsvarende $(a,b,c)=a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2+c\mathbf{e}_3$.

8.1 OPPGAVER

1. La $\mathbf{a}=(5,1)$ og $\mathbf{b}=(-2,3)$. Regn ut

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ b) $2\mathbf{a}$ c) $-3\mathbf{b}$

d) $|\mathbf{b}|$ e) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ f) $|5\mathbf{a}|$

2. Illustrer resultatene fra oppgave 1 på en figur ved å tegne **a** og **b** som piler.

3. Finn vinkelen mellom vektorene (3, 1, 5) og (5, 4, 3). Illustrer på en figur.

4. Avgjør om de to vektorene $(2,3,-1,2)$ og $(1,-2,1,2)$ står vinkelrett på hverandre.

5. La $\mathbf{a}=(2,-1,2)$ og $\mathbf{b}=(3,4,-2)$. Regn ut

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ b) $2\mathbf{a}-5\mathbf{b}$ c) $-3\mathbf{b}$

d) $|\mathbf{b}|$ e) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ f) $|5\mathbf{a}|$

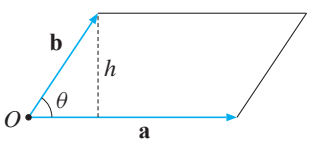
Prøv å illustrere resultatene på en figur ved å tegne **a** og **b** som piler.

TEOREM 3

Lengden av vektorproduktet

Lengden av $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er arealet av parallellogrammet utspent av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.

BEVIS Dette følger fra punkt 5 i forrige teorem, kombinert med følgende figur:



$h = |\mathbf{b}| \sin\theta$, så arealet av parallellogrammet er $|\mathbf{a}| \cdot h = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\theta$. ■

Det gjenstår å begrunne at «høyrehåndsregelen» for retningen til $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er korrekt. Høyrehåndsregelen er bare en del av vår geometriske *tolkning* av teorien, vi har ikke gitt noen *matematisk presis* definisjon av hva det vil si at tre vektorer danner et høyrehåndssystem. Derfor blir denne begrunnelsen kun intuitiv.

Observer først at siden $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står vinkelrett på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, er det bare to muligheter for retningen til $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, nemlig «vinkelrett opp» eller «vinkelrett ned». Se figuren s. 348. Hvilken retning blir det? Direkte utregning gir $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$. Altså stemmer høyrehåndsregelen i det tilfellet. Tenk deg så at du deformerer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ over til $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i en kontinuerlig bevegelse. Siden komponentene til $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er kontinuerlige funksjoner av komponentene til $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, er det umulig at $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ plutselig «flipper retning» under bevegelsen. Ergo blir høyrehåndsordningen bevart underveis.

8.2 OPPGAVER

1. Finn $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ når

a) $\mathbf{a} = (3, 2, -1)$ og $\mathbf{b} = (2, 0, -1)$

b) $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ og $\mathbf{b} = (2, 3, 0)$

c) $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ og $\mathbf{b} = (-1, -1, -1)$

2. La $\mathbf{u} = (-1, 1, 0)$ og $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$. Regn ut $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, og illustrer resultatet på en figur.

3. La P være parallellogrammet i planet som har tre av sine hjørner i henholdsvis $(5, 1)$, $(1, 4)$ og origo. Illustrer P på en figur, og finn arealet av P ved å regne ut et passende vektorprodukt.

4. Finn arealet av det parallellogrammet i planet som har hjørner i $(3, 3)$, $(-4, 3)$, $(-1, 6)$ og $(0, 0)$.

5. Finn arealet av det parallellogrammet i planet som har hjørner i $(3, 4)$, $(-4, 4)$, $(-1, 7)$ og $(0, 1)$.

6. Finn arealet av trekanten i planet som har ett hjørne i origo, ett hjørne i punktet $(5, -7)$ og ett hjørne i punktet $(3, 6)$.

7. Vis at hvis (a, b) og (c, d) er to vektorer i planet, så er arealet av parallellogrammet utspent av de to vektorene lik absoluttverdien av determinanten

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

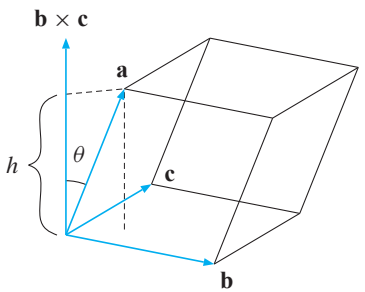
Hint: Regn ut $(a, b, 0) \times (c, d, 0)$, og bruk teorem 8.2.3 i kombinasjon med det $A = \det A^{\mathrm{T}}$ (teorem 7.6.4).

8. Sjekk ved en tilsvarende regning som i oppgave 7 at lov 2, 3 og 4 fra teorem 8.2.2 holder.

9. La $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$. Regn ut $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ og $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Konkluder med at vektorproduktet ikke er assosiativt.

(2) Siden $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b})$, har vi $|\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b})|$. Vi kan derfor anta at $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \geq 0$, for i motsatt fall døper vi om $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$.

Med **parallellepipedet** utspent av $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ menes delmengden av rommet $\mathbb{R}^3$ vist på figuren under:



Formelt sett består parallellepipedet av alle punkter $\mathbf{p}$ som kan skrives på formen $\mathbf{p} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$, der r, s og t er tall i intervallet $[0, 1]$. Vi har ikke definert hva som menes med *volumet* av en slik mengde, og derfor kan vi ikke *bevise* at volumet er lik noe som helst. Det må vi utsette til kapittel 10, se oppgave 10.6.2. Men intuitivt kan vi gjøre følgende resonnement, som viser seg å gi oss det riktige svaret: Grunnflaten i boksen er parallellogrammet utspent av $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, så arealet av den er $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$. Videre er $h = |\mathbf{a}| \cos\theta$, der θ er vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Så

$$V = (\text{grunnflate}) \cdot (\text{høyde}) = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos\theta = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad \blacksquare$$

EKSEMPEL 2 Ved forrige eksempel får vi at volumet av parallellepipedet utspent av de tre vektorene $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$ og $\mathbf{c} = (-1, 2, 1)$ er

$$V = |-1| = 1 \quad \blacksquare$$

8.3 OPPGAVER

1. Finn volumproduktet av de tre vektorene $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ og $\mathbf{c} = (9, 0, 0)$.

2. Finn volumet av parallellepipedet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (4, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 5, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 6)$.

3. Regn ut volumet av pyramiden med hjørner i punktene $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(1, 3, 0)$ og $(1, 2, 4)$. Hint: Tegn en figur. Pyramiden kan oppfattes som en sjettedel av et parallellepiped.

4. I denne oppgaven skal vi se på et resultat som i likhet med volumproduktet har å gjøre med forholdet mellom vektorprodukt og prikkprodukt, nemlig at vi for alle $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ har

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \qquad (1)$$

a) Hvorfor er det rimelig at $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}) \times \mathbf{c})$ kan skrives $u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$ for passende tall u og v?

b) Bevis regelen (1).