UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	9. desember 2014.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	LØSNINGSFORSLAG

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

I denne oppgaven betrakter vi $\mathbb{R}^4$ utstyrt med det vanlige Euklidske indreproduktet (m.a.o. prikkproduktet). Betrakt vektorene $\mathbf{a}_1 = (1,0,0,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,2,0,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (3,1,1,-1)$ i $\mathbb{R}^4$. Disse vektorene er lineært uavhengige, men du behøver ikke vise dette. La $W = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

1a

Finn en ortonormal basis for W.

Løsning: Mengden $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ er en basis for W. Gram-Schmidt prossesen med normalisering gir da

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = (1,0,0-1)\,, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,0,-1)\,;$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\,\mathbf{v}_1 = (1,2,0,-1) - \frac{2}{2}(1,0,0,-1) = (0,2,0,0)\,,$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = (0,1,0,0)\,;$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\,\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\,\mathbf{v}_2 = (3,1,1,-1) - \frac{4}{2}(1,0,0,-1) - \frac{2}{4}(0,2,0,0) = (1,0,1,1)\,,$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,0,1,1)\,.$$

Mengden $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u_2}, \mathbf{u}_3\}$ er da en ortonormal basis for W.

□

(Fortsettes på side 2.)

La $\mathbf{b} = (3, 2, -2, -1)$ og betrakt likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & = & 3 \\ & & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & -2 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array} \tag{1}$$

1b

Beregn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på W. Finn minste kvadraters løsning av likningssystemet (1).

Løsning: Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ *på* W *er gitt ved*

$$\widehat{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_3)\,\mathbf{u}_3$$

$$= 2\,(1,0,0,-1) + 2\,(0,1,0,0) + 0\,(1,0,1,1) = (2,2,0,-2)\,.$$

Minstekvadraters løsning av (1) er derfor løsning av systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & = & 2 \\ & & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & 0 \\ -\,x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$

Det gir $\mathbf{x}^* = (1, 1, 0)$.

□

Oppgave 2

La $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.9 \end{bmatrix}$ og betrakt det dynamiske systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k$ der $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Er $\mathbf{0}$ en attraktor for dette systemet ? (Forklar svaret ditt).

Løsning: Matlab-utskriften viser at A *har en reell egenverdi* λ_1 *og to (konjugerte) komplekse egenverdier* λ_2 *og* λ_3*, og at alle disse egenverdiene har modulus mindre enn 1. Vi vet da fra Avsn. 5.6 i Lay at* $\mathbf{0}$ *vil være en attraktor for det dynamiske systemet. Argumentet (som ikke kreves i besvarelsen) er som følger. Vi kan velge en tilhørende egenvektor* $\mathbf{v}_j \in \mathbb{C}^3$ *for hver* λ_j*. Siden disse egenvektorene tilhører forskjellige egenverdier gir de en basis for* $\mathbb{C}^3$*, og vi kan defor skrive en gitt vektor* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ *på formen* $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ *for passende* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$*. Siden* $|\lambda_j| < 1$ *vil* $|\lambda_j^k| = |\lambda_j|^k \to 0$ *for hver* j*. Dermed vil*

$$\mathbf{x}_k = A^k\,\mathbf{x}_0 = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3^k\mathbf{v}_3 \to \mathbf{0}$$

når $k \to \infty$*, og det viser at alle banene ("trajectories") for systemet vil nærme seg* $\mathbf{0}$ *når* k *blir stor, m.a.o. at* $\mathbf{0}$ *er en attraktor for systemet*

□

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3

La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3a

Beregn $B = A^T A$. Bestem deretter egenverdiene til B, og angi de tilhørende egenrommene.

Løsning: Utregning gir

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

som har egenverdier 7 og 5. De tilhørende egenrom er henholdsvis $\mathrm{Span}\{(1,1)\}$ *og* $\mathrm{Span}\{(1,-1)\}$. □

3b

Finn en singulærverdi dekomposisjon (SVD) for A.

Løsning: Fra 3a får vi at singulærverdiene til A er $\sigma_1 = \sqrt{7}$ og $\sigma_2 = \sqrt{5}$, mens en ortonormal egenvektorbasis til B er gitt ved $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2})(1,1)$ og $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2})(-1,1)$. Dette gir $\mathbf{u}_1 = (1/\sigma_1)A\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{14})(3,2,-1)$ og $\mathbf{u}_2 = (1/\sigma_2)A\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{10})(-1,0,-3)$. Finner deretter en enhetsvektor $\mathbf{u}_3$ som er ortogonal på $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$: velger f.eks. $\mathbf{u}_3 = (1/\sqrt{35})(-3,5,1)$.
En SVD for A blir da $A = U\Sigma V^T$ der

$$U = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{35} \\ 2/\sqrt{14} & 0 & 5/\sqrt{35} \\ -1/\sqrt{14} & -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{35} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

□

3c

La E være mengden av alle punkter (x_1, x_2) i x_1x_2-planet som oppfyller den kvadratiske likningen

$$6\,x_1^2 + 2\,x_1x_2 + 6\,x_2^2 = 35\,.$$

Begrunn at E er en ellipse og lag en skisse av E i x_1x_2-planet.

Løsning: Likningen ovenfor kan omskrives som $\mathbf{x}^T B\,\mathbf{x} = 35$.
La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ være vektorene angitt i 3b. Vet da at den ortogonale matrisen $P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$ diagonaliserer B, og at variableskiftet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ gir likningen $7\,y_1^2 + 5\,y_2^2 = 35$, dvs

$$\frac{y_1^2}{5} + \frac{y_2^2}{7} = 1\,.$$

Dette er likningen for en ellipse i y_1y_2-planet, med sentrum i origo, og med halvakser $\sqrt{5}$ og $\sqrt{7}$. Enhetsvektorer for aksene i x_1x_2-planet er da gitt ved $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

□

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4

Vi minner om at $\mathbb{P}_n$ betegner vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad mindre eller lik n i en reell variabel x. For $k = 0, \ldots, n$ lar vi $p_k \in \mathbb{P}_n$ være definert ved $p_k(x) = x^k$. Videre lar vi $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ og $\mathcal{C} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ betegne standardbasisene for henholdsvis $\mathbb{P}_2$ og $\mathbb{P}_3$.

La $a \in \mathbb{R}$. Definer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$q_1(x) = x - a\,,\ q_2(x) = x\,(x-a)\,,\ q_3(x) = x^2\,(x-a)\,.$$

Sett $W = \{q \in \mathbb{P}_3 \mid q(a) = 0\}$.

4a

Begrunn at $\{q_1, q_2, q_3\}$ er lineært uavhengig.

Løsning: Vi har at $[q_1]_{\mathcal{C}} = (-a, 1, 0, 0)$, $[q_2]_{\mathcal{C}} = (0, -a, 1, 0)$, $[q_3]_{\mathcal{C}} = (0, 0, -a, 1)$. *Enkel radreduksjon gir at den reduserte trappeformen til matrisen*

$$M = \begin{bmatrix} [q_1]_{\mathcal{C}} & [q_2]_{\mathcal{C}} & [q_3]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

har en pivot i alle kolonner. Dette betyr at kolonnene til M *er lineært uavhengige. Ved Notat 1 er da* $\{q_1, q_2, q_3\}$ *er lineært uavhengig.*

□

4b

Begrunn at W er et underrom av $\mathbb{P}_3$. Vis deretter at $\{q_1, q_2, q_3\}$ er en basis for W.

Løsning: For $q, h \in W$ *og* $c \in \mathbb{R}$, *er* $(q+h)(a) = q(a) + h(a) = 0$ *og* $(cq)(a) = c\,q(a) = 0$, *dvs* $q + h \in W$ *og* $cq \in W$. *Dette viser at* W *er et underrom av* $\mathbb{P}_3$.

Det er klart $q_1(a) = q_2(a) = q_3(a) = 0$, *m.a.o. at* q_1, q_2 *og* q_3 *ligger i* W. *Siden* q_1, q_2 *og* q_3 *er lineært uavhengige (jf. 4a) er da* $\dim W \geq 3$. *Videre er* $W \neq \mathbb{P}_3$ *(f.eks. er* $p_0 \in \mathbb{P}_3$, *mens* $p_0 = 1 \notin W$*). Siden* $\dim \mathbb{P}_3 = 4$ *er da* $\dim W \leq 3$. *Tilsammen viser dette at* $\dim W = 3$. *Mengden* $\mathcal{S}$, *som består av tre lin. uavh. vektorer i* W, *er da en basis for* W. *(Alternativt kan man her begrunne at* q_1, q_2 *og* q_3 *utspenner* W*)* †

□

4c

Definer en lineær avbildning $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ ved

$$[T(p)](x) = (x-a)\,p(x) \qquad \text{for alle } p \in \mathbb{P}_2\,.$$

Bestem matrisen M til T med hensyn på $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$. Begrunn at T er 1-1 og at bildet av T er lik W (m.a.o. at $\{T(p) \mid p \in \mathbb{P}_2\} = W$).

(Fortsettes på side 5.)

Løsning: Matrisen M er gitt ved

$$M = \Big[\, [T(p_0)]_{\mathcal{C}} \; [T(p_1)]_{\mathcal{C}} \; [T(p_2)]_{\mathcal{C}} \,\Big] = \Big[\, [q_1]_{\mathcal{C}} \; [q_2]_{\mathcal{C}} \; [q_3]_{\mathcal{C}} \,\Big] = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fra Notat 2 vet vi at T er 1-1 hvis og bare hvis avbildningen $T_M : \mathbf{x} \to M\,\mathbf{x}$ fra $\mathbb{R}^3$ inn i $\mathbb{R}^4$ er 1-1, noe som er tilfelle hvis og bare hvis kolonnene til M er lineært uavhengige. Dette har vi sjekket i 4a. Dermed er T 1-1.
Siden $\mathbb{P}_2 = Span\{p_0, p_1, p_2\}$ og T er lineær, er

$$\{T(p) \mid p \in \mathbb{P}_2\} = Span\{T(p_0), T(p_1), T(p_2)\} = Span\{q_1, q_2, q_3\} = W\,,$$

der den siste likheten er oppfylt fordi $\{q_1, q_2, q_3\}$ utspenner W (jf. 4b). Alternativt (og enklere) kan vi si at W består av polynomene i $\mathbb{P}_3$ der a er en rot, og det er velkjent at $x - a$ er en faktor i slike polynomer, m.a.o. at disse ligger i bildet av T.

□

4d

Begrunn at det finnes et indreprodukt på $\mathbb{P}_3$ som er slik at $\{q_1, q_2, q_3\}$ blir en ortonormal basis for W, samtidig som $W^{\perp} = \mathrm{Span}\,\{p_0\}$.

Løsning: Sett $q_4 = p_0 = 1$. Som bemerket tidligere, er $q_4 = 1 \notin W = Span\{q_1, q_2, q_3\}$, og det medfører at $\mathcal{U} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ er lineært uavhengig. Siden $\mathbb{P}_3$ har dimensjon 4, er $\mathcal{U}$ en basis for $\mathbb{P}_3$. Vi kan da definere et indreprodukt på $\mathbb{P}_3$ ved

$$\langle q, h\rangle = [q]_{\mathcal{U}} \cdot [h]_{\mathcal{U}}$$

når $q, h \in \mathbb{P}_3$. Siden $\langle q_i, q_j\rangle = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ er lik 1 hvis $i = j$ og lik 0 ellers, er $\mathcal{U}$ en ortonormal basis for $\mathbb{P}_3$. Det gir at $\{q_1, q_2, q_3\}$ er en ortonormal basis for W og at $q_4 \in W^{\perp}$. Siden $dim\,W^{\perp} = dim\,\mathbb{P}_3 - dim\,W = 1$, er $W^{\perp} = Span\{q_4\} = Span\{p_0\}$, som ønsket.

□

(Fortsettes på side 6.)

Matlab-utskrift

```
>> A = [0 0 0.5; 0.2 0 0; 0 0.6 0.9]

A =

         0         0    0.5000
    0.2000         0         0
         0    0.6000    0.9000

>>  eig(A)

ans =

  -0.0322 + 0.2473i
  -0.0322 - 0.2473i
   0.9645 + 0.0000i

>> abs(ans(1))

ans =

    0.2494
```