UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	9. desember 2015.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig. I oppgavene 1, 2 og 4 betrakter vi alltid det vanlige Euklidske indreproduktet (m.a.o. prikkproduktet).

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La H være nullrommet til A og la W være kolonnerommet til A. La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineæravbildningen gitt ved $T(\mathbf{x}) = \text{Proj}_W(\mathbf{x})$, så $T(\mathbf{x})$ er den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{x}$ ned i W.

1a

Finn en basis for H, og en basis for W. Hva er rangen til A?

1b

Bestem en ortonormal basis for W og finn standardmatrisen til T, dvs. 3×3 matrisen P som er slik at $T(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

1c

La $\mathbf{b} = (4, 5, 0)$. Beregn $\text{Proj}_W(\mathbf{b})$. Finn deretter *alle* minste kvadraters løsninger av systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Oppgave 2

Betrakt igjen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(Fortsettes på side 2.)

2a

Finn egenverdiene til A, og angi en tilhørende egenvektor for hver av disse.

2b

Begrunn (uten regning) at A er ortogonalt diagonaliserbar. Bestem deretter en ortogonal matrise U og en diagonal matrise D som gir en ortogonal diagonalisering av A.

2c

Betrakt den kvadratiske formen

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3^2 - 2\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3$$

der $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Begrunn at 0 er den minste verdien som $Q(\mathbf{x})$ antar når $\mathbf{x}$ varierer gjennom $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 3

La $\mathbb{P}_2$ betegne vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad mindre enn eller lik 2 i en reell variabel t. La $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ være standardbasisen for $\mathbb{P}_2$, dvs $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ og $p_2(t) = t^2$.

Definer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_2$ ved

$$q_1(t) = 1 + t\,,\ q_2(t) = 1 - t,\ q_3(t) = t + t^2\,.$$

3a

Begrunn at $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$. Beregn deretter koordinatvektoren $[q]_{\mathcal{C}}$ når $q(t) = 1 + t + 2\,t^2$.

Definer en lineæravbildning $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ ved at et polynom $p \in \mathbb{P}_2$ gitt ved $p(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2$ avbildes over i $T(p)$, der

$$\big(T(p)\big)(t) = (2c_1 - 2c_2) + (2c_0 + 3c_2)\,t + 3c_2\,t^2.$$

3b

Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ for T relativt til $\mathcal{B}$. Finn også matrisen $[T]_{\mathcal{C}}$ for T relativt til $\mathcal{C}$.

3c

Begrunn at T er en isomorfi og beregn koordinatvektoren $\big[T^{-1}(q)\big]_{\mathcal{C}}$ når $q(t) = 1 + t + 2\,t^2$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

La $n \in \mathbb{N}$ og la P være en symmetrisk $n \times n$ matrise som oppfyller at $P^2 = P$. La W være kolonnerommet til P. La $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ og sett $\mathbf{z} = \mathbf{y} - P\mathbf{y}$.

Vis at $\mathbf{z} \in W^\perp$, dvs. at $\mathbf{z}$ er ortogonal på W. Begrunn deretter at $\text{Proj}_W(\mathbf{y}) = P\mathbf{y}$, der $\text{Proj}_W(\mathbf{y})$ betegner den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ ned i W.

Lykke til!

(Fortsettes på side 4.)

Matlab-utskrift:

```
>> A= [1 0 -1; 0 1 -1; -1 -1 2];
>> rref(A)

ans =

     1     0     -1
     0     1     -1
     0     0      0

>> poly(A)

ans =
      1    -4     3     0


>> N= [1 1 0; 1 -1 1; 0 0 1];
>> rref(N)

ans =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

 >> inv(N)

ans =

     1/2      1/2     -1/2
     1/2     -1/2      1/2
      0        0        1
```