UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Torsdag 6 desember, 2018
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamensettet består av tilsammen 10 deloppgaver som teller likt ved sensuren. Det forventes at du gir forklaringer for alle dine svar. Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1a

Angi siste radvektor i A som en lineær kombinasjon av de to første radvektorene. Finn deretter rangen til matrisen A. Finn også dimensjonen til nullrommet til A.

La $\mathbf{p} = (1, -2, -3)$ og $\mathbf{z} = (1, -1, 1)$. Videre la $W = \operatorname{Col} A$ være kolonnerommet til A.

1b

Vis at $\mathbf{p} \in W$ og at $\mathbf{z} \in W^{\perp}$, der $W^{\perp}$ betegner det ortogonale komplementet til W når $\mathbb{R}^3$ er utstyrt med det vanlige prikkproduktet.

La $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{z}$, så $\mathbf{b} = (2, -3, -2)$.

1c

Finn alle minste kvadraters løsninger til systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(Fortsettes på side 2.)

Anta nå at $\mathbb{R}^3$ er utstyrt med det vektede indreproduktet gitt ved

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2\,x_1y_1 + 2\,x_2y_2 + \,x_3y_3$$

for $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ i $\mathbb{R}^3$.

1d

Finn en ortogonal basis for W. Beregn deretter den ortogonale projeksjonen $\mathbf{q}$ av $\mathbf{y} = (0, -1, -5)$ ned i W.

Oppgave 2

La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2a

Vis at $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$ er egenvektorer for A. Vis også at 2 er en egenverdi for A.

2b

Begrunn at A er diagonaliserbar. Finn egenverdiene til A^{10}.

2c

Finn den generelle løsningen av diff.likning systemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$$

der $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Bestem deretter løsningen som tilfredstiller at $\mathbf{x}(0) = (1, -1, 1)$.

Oppgave 3

La $a \in \mathbb{R}$, og la $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være den kvadratiske formen gitt ved

$$Q(\mathbf{x}) = a\,x_1^2 - 2\,x_1x_2 + a\,x_2^2$$

for $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. For hvilke verdier av a er Q positiv definit?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

La n være et naturlig tall og la V være et vektorrom med dimensjon n. Anta at $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for V (ordnet i den oppgitte rekkefølgen). For hver $k = 1, 2, \ldots, n$ definer

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{b}_k.$$

Altså: $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, etc.

Sett $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$. Videre, la $\mathbf{v} \in V$ være gitt ved

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \cdots + \mathbf{b}_n.$$

Så alle vektene i summen ovenfor er 1, unntatt den første som er 2.

4a

Begrunn først at $\mathcal{C}$ er en basis for V. Finn deretter koordinatvektorene $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ og $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$. (Vi betrakter $\mathcal{C}$ som ordnet i den oppgitte rekkefølgen.)

Anta nå at $n = 4$. La $T : V \to V$ være lineæravbildningen bestemt ved

$$\begin{aligned} T(\mathbf{b}_1) &= \mathbf{b}_1, \\ T(\mathbf{b}_2) &= -2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, \\ T(\mathbf{b}_3) &= 2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ T(\mathbf{b}_4) &= -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

4b

Finn $[T]_{\mathcal{B}}$ og $[T]_{\mathcal{C}}$. Er T en isomorfi?

Lykke til!

Husk Matlab-utskriften på neste side!

(Fortsettes på side 4.)

Matlab-utskrift.

```
>> B

B =

      1          1          1          1
      0          2          1         -2
     -1          1          0         -3

>> rref(B)

ans =

       1          0        1/2          2
       0          1        1/2         -1
       0          0          0          0


>> C

C =

      -1         -1         -1          1
       1          0          1         -1
       0          1          1          1

>> rref(C)

ans =

       1          0          0         -2
       0          1          0          0
       0          0          1          1
```