UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Onsdag, 4. desember 2019.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 2b osv.) teller likt.
Merk: Den vedlagte Matlab-utskriften er aktuell for deloppgave 4b. Du kan henvise til denne når du finner det hensiktsmessig. Merk at en tilnærmet verdi for $1/\sqrt{2}$ *er* 0.7071.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La $W = \operatorname{Col} A$ være kolonnerommet til A og la $\operatorname{Nul} A$ være nullrommet til A.

1a

Finn en basis for W. Finn en basis for $\operatorname{Nul} A$.

I deloppgavene **1b** og **1c** nedenfor er $\mathbb{R}^4$ gitt med vanlig prikkprodukt.

1b

Finn en ortogonal basis for W.

Sett $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

(Fortsettes på side 2.)

1c

Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ ned i W. Finn alle minste kvadraters løsninger av likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Anta nå at $\mathbb{R}^4$ er utstyrt med det vektede indre produktet gitt ved
$< \mathbf{x}, \mathbf{u} >= 2x_1u_1 + 2x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$
for $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ og $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. (Det er ikke meningen at du skal vise at dette er et indreprodukt.)

1d

Finn en ortogonal basis for W med hensyn på dette indre produktet. Finn $\hat{\mathbf{y}} \in W$ slik at $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|$ er minst mulig, når normen $\|\cdot\|$ nå er definert ved $\|\mathbf{x}\|^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ og $\mathbf{y}$ er vektoren vi definerte i 1c.

Oppgave 2

La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2a

Vis at $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A. Finn en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^T$.

2b

Finn løsningen til systemet av differensiallikninger

$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ som tilfredstiller $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Oppgave 3

La $\mathcal{B}$ være delmengden $\{1, e^x \cos x, e^x \sin x\}$ av vektorrommet av uendelig mange ganger deriverbare reelle funksjoner på $\mathbb{R}$. La $V = \operatorname{Span} \mathcal{B}$. Da er $\mathcal{B}$ en basis for V (det er ikke meningen du skal vise dette).

La $\mathcal{C} = \{1 + e^x \cos x, 1 + e^x \sin x, e^x(\cos x + \sin x)\}$.

3a

Vis at $\mathcal{C}$ er en basis for V. Finn basisskifte-matrisen, $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$, og finn den tilsvarende basisskifte-matrise $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

(Fortsettes på side 3.)

3b

Definer en lineæravbildning $T : V \to V$ ved at en funksjon $f \in V$ avbildes over i $T(f)$, der

$$T(f)(x) = f'(x).$$

(Du trenger ikke vise at T er en lineæravbildning.)
Finn en matrise $[T]_{\mathcal{B}}$ slik at $[T(f)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$, og en matrise $[T]_{\mathcal{C}}$ slik at $[T(f)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}$ for alle $f \in V$.

3c

La $S : V \to V$ være lineæravbildningen gitt ved

$$S(f)(x) = f''(x) - 2f'(x) + 2f(x).$$

(Du trenger heller ikke her vise at S er en lineæravbildning.)
Finn en matrise $[S]_{\mathcal{B}}$ slik at $[S(f)]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ for alle $f \in V$. Finn $\ker S = \{f \in V \,:\, S(f) = \mathbf{0}\}$. (Her er altså $\mathbf{0}$ funksjonen som er konstant lik 0.)

Oppgave 4

4a

Avgjør om matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

er diagonaliserbar.

4b

La

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Bestem en singulærverdi dekomposisjon $B = U\,\Sigma\,V^T$. Finn en vektor $\mathbf{y}$ med $\|\mathbf{y}\| = 1$ slik at

$$\|B\mathbf{y}\| = \max\{\|B\mathbf{x}\| \,:\, \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Lykke til!

(Fortsettes på side 4.)

Matlab-utskrift.

```
>>C=[4 0 0
0 32 -32
0 -32 32]

C =

     4     0     0
     0    32   -32
     0   -32    32

>> [V D]=eig(C)

V =
          0    1.0000         0
    -0.7071         0   -0.7071
    -0.7071         0    0.7071



D =

     0     0     0
     0     4     0
     0     0    64
```