UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	8. desember 2021.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Se første siden i Inspera.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamensettet består av til sammen 10 deloppgaver som alle gir maksimum 10 poeng ved sensuren. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 9 & 15 & 8 \\ 1 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

a Finn en basis for $\operatorname{Col} A$. Finn også en basis for $\operatorname{Nul} A$.

Løsning. Vi radreduserer

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 9 & 15 & 8 \\ 1 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7/6 & 5/6 \\ 0 & 0 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7/6 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette kunne man også fått gratis ved å se på Matlab-utskriften. De tre første søylene i A er derfor pivotsøyler, og er dermed en basis for $\operatorname{Col} A$.

(Fortsettes på side 2.)

Hvis $\mathbf{x}$ er en vektor i nullrommet ser vi at komponentene må oppfylle

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Det følger at

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_4 \\ \frac{1}{3}x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det følger at $\{(6, 1, -3, 3)\}$ er en basis for $\operatorname{Nul} A$, der vi skalerte vektoren for å få heltallige koeffisienter.

b Finn en ortogonal basis for $\operatorname{Col} A$.

Løsning. Vi betegner søylene i A med $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$. Basert på resultatene i forrige deloppgave bruker vi Gram–Schmidt prosessen på $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{24}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 15 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{39}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{57}{57}\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ -5/2 \end{bmatrix},$$

der vi underveis regnet ut

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 6 && \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 24 && \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 39 \\ &\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 57 && \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 57 \end{aligned}$$

ganger vi $\mathbf{v}_3$ med 2 får vi følgende ortogonale basis med heltallige verdier:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi merker oss at $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 34$.

c Finn den ortogonale projeksjonen av

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(Fortsettes på side 3.)

på Col A, og finn alle minste kvadraters løsninger til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Løsning. Vi regner ut

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_1 &= 11-6+7 = 12\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_2 &= -44+90-3+14 = 57\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_3 &= 11+30-6-35 = 0.\end{aligned}$$

Det følger at den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på W er

$$\widehat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1+\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2+\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_3}\mathbf{v}_3 = \frac{12}{6}\mathbf{v}_1+\frac{57}{57}\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-2\\6\\5\\4\end{bmatrix}.$$

Minste kvadraters løsningene er løsninger av $A\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{b}}$, som gir oss systemet

$$\begin{bmatrix}1&0&3&1&-2\\0&6&7&5&6\\2&9&15&8&5\\1&6&6&2&4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&3&1&-2\\0&6&7&5&6\\0&9&9&6&9\\0&6&3&1&6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&3&1&-2\\0&1&7/6&5/6&1\\0&0&-3/2&-3/2&0\\0&0&-4&-4&0\end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix}1&0&3&1&-2\\0&1&7/6&5/6&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&-2&-2\\0&1&0&-1/3&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

som man også kunne fått gratis via Matlab-utskriften. Dette gir at $x_1 - 2x_4 = -2$, $x_2 - \frac{1}{3}x_4 = 1$, og $x_3 + x_4 = 0$. Her er x_4 er en fri variabel, slik at

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2+2x_4\\1+\frac{1}{3}x_4\\-x_4\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}2\\1/3\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix}1&-2&4\\-2&-2&-2\\4&-2&1\end{bmatrix}.$$

a Vis at

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$$

er en egenvektor for A. Vis videre at $\lambda = -3$ er en egenverdi for A og finn en basis for det tilhørende egenrommet.

(Fortsettes på side 4.)

Løsning. Siden

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 6\mathbf{v},$$

er $\mathbf{v}$ en egenvektor med egenverdi $\lambda = 6$. For å vise at $\lambda = -3$ er en egenverdi og for å finne en basis for det tilhørende egenrommet ser vi på ligningen $(A + 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Siden

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oppfyller enhver løsning ligningen $-2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Videre kan vi nå skrive $x_3 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2$. slik at en egenvektor må være på formen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(hvis du eliminerer x_1 eller x_2 i stedet får du litt andre uttrykk). Den generelle løsningen av $(A + 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er altså

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at $\lambda = -3$ er en egenverdi og at en basis for det tilhørende egenrommet er

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

b Begrunn at A er ortogonalt diagonaliserbar. Finn en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^T$.

Løsning. Siden A er symmetrisk, så er A ortogonalt diagonaliserbar. Basert på utregningene i forrige deloppgave vet vi at

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for $\mathbb{R}^3$. Vi trenger en ortonormal basis. Vi vet at egenvektorer til forskjellige egenverdier er ortogonale. Derfor velger vi

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Ved Gram–Schmidt får vi

$$\widetilde{\mathbf{v}}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$$

og følgelig blir

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\widetilde{\mathbf{v}}_3\|}\widetilde{\mathbf{v}}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}.$$

Da er $A = PDP^T$ for

$$P = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u_3}\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad D = \begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

c Betrakt den kvadratiske formen

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Vis at $Q(\mathbf{x}) \leq 6\|\mathbf{x}\|^2$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Her er $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Løsning. Vi ser fort at A er matrisen til den kvadratiske formen Q, det vil si at

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.$$

Siden den største egenverdien i A er 6 så følger det fra at Teorem 6 i Seksjon 7.3 at $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 6$ for alle $\mathbf{x}$ med $\|\mathbf{x}\| = 1$. Hvis $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ er en generell vektor så er $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ en vektor med lengde 1, og da er

$$\frac{\mathbf{x}^T}{\|\mathbf{x}\|}A\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \leq 6.$$

Ganger vi opp med $\|\mathbf{x}\|^2$ på begge sider får vi at $Q(\mathbf{x}) \leq 6\|\mathbf{x}\|^2$.

Man kan også argumentere ved å bruke den spektrale dekomposisjonen til A. Hvis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er den ortonormale basisen for $\mathbb{R}^3$ fra forrige deloppgave, så er

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= 6(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)^2 - 3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)^2 - 3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_3)^2 \\ &\leq 6\big((\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_3)^2\big) = 6\|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

En variant av dette argumentet er å bruke variabelbyttet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, der P er matrisen fra forrige deloppgave. Da er $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$, der D er diagonal og har egenverdiene til A på diagonalen. Vi har og at $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ siden P er ortogonal, og siden den største egenverdien er 6 får vi dermed

$$Q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 \leq 6(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 6\|\mathbf{y}\|^2 = 6\|\mathbf{x}\|^2.$$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 3

La V være vektorrommet med basis $\mathcal{B} = \{\sin t, \cos t\}$ og la $T\colon V \to V$ være definert ved

$$(Tf)(t) = f'(t) + f''(t).$$

a Vis at T er en lineærtransformasjon.

Løsning. Vi har at

$$\begin{aligned}(T(f+g))(t) &= (f+g)'(t) + (f+g)''(t) = f'(t) + g'(t) + f''(t) + g''(t)\\ &= (f'(t) + f''(t)) + (g'(t) + g''(t)) = (Tf)(t) + (Tg)(t)\\ (T(cf))(t) &= (cf)'(t) + (cf)''(t) = cf'(t) + cf''(t) = c(Tf)(t).\end{aligned}$$

Det følger at $T(f+g) = Tf + Tg$ og at $T(cf) = cTf$, slik at T er en lineærtransformasjon.

b Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$. La g være en funksjon i V. Bruk $[T]_{\mathcal{B}}$ til å vise at differensialligningen

$$\begin{cases} f'(t) + f''(t) = g(t), \\ f \in V, \end{cases}$$

har nøyaktig én løsning.

Løsning. Vi kaller $f_1(t) = \sin t$ og $f_2(t) = \cos t$. For å finne $[T]_{\mathcal{B}}$ regner vi ut

$$\begin{aligned}(Tf_1)(t) &= \cos t - \sin t = -f_1(t) + f_2(t),\\ (Tf_2)(t) &= -\sin t - \cos t = -f_1(t) - f_2(t).\end{aligned}$$

Av dette følger det at

$$[Tf_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad [Tf_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Altså blir

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [Tf_1]_{\mathcal{B}} & [Tf_2]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Differensialligningen kan skrives som $Tf = g$ for $f \in V$, som vi skriver om på matriseform som $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, der

$$A = [T]_{\mathcal{B}}, \qquad \mathbf{x} = [f]_{\mathcal{B}} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{y} = [g]_{\mathcal{B}}.$$

Siden A er invertibel (vi kan for eksempel sjekke at $\det A = 2$) vet vi at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ har en unik løsning gitt ved $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$. Altså har også differensialligningen $Tf = g$ for $f \in V$ en unik løsning.

Oppgave 4

La A være en 3×3 matrise med egenverdier $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$ og $\lambda_3 = x$ der x er et reelt tall som ikke er lik 3 eller 5. Begrunn at A er diagonaliserbar.

(Fortsettes på side 7.)

Hva er x dersom $\det A = 105$?

Løsning. Siden A er en 3×3 matrise med tre forskjellige egenverdier så må den ha tre lineært uavhengige egenvektorer, og da blir den også diagonaliserbar. Altså kan vi skrive $A = PDP^{-1}$ der P er en invertibel matrise og

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Vi får da at

$$105 = \det A = \det(PDP^{-1}) = \det P \cdot \det D \cdot \det P^{-1}.$$

Siden $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$ følger det at $105 = \det D = 15x$, så $x = 7$.

Oppgave 5

Anta at A er en 3×3 matrise med diagonalisering $A = PDP^{-1}$, for

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La I være 3×3 identitetsmatrisen og la

$$B = 2I + A - A^2.$$

Vis at dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A, så er $\mathbf{v}$ en egenvektor for B. Er B invertibel? Finn en diagonalisering av B.

La $\mathbf{v}$ være en egenvektor for A med egenverdi λ. Da er

$$B\mathbf{v} = (2I + A - A^2)\mathbf{v} = 2\mathbf{v} + A\mathbf{v} - A^2\mathbf{v} = 2\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} - \lambda^2\mathbf{v} = (2 + \lambda - \lambda^2)\mathbf{v}.$$

Dette viser at $\mathbf{v}$ også er en egenvektor for B, og at den tilhørende egenverdien er $2 + \lambda - \lambda^2$. Egenverdiene til A finner vi på diagonalen til D, slik at de er 1, 2 og 3. Egenverdiene til B er derfor

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 + 1 - 1^2 = 2, \\ \lambda_2 &= 2 + 2 - 2^2 = 0, \\ \lambda_3 &= 2 + 3 - 3^2 = -4. \end{aligned}$$

Siden 0 er en egenverdi for B, så er ikke B invertibel. Siden B har samme egenvektorer som A, og siden egenverdiene til B er 2, 0 og -4, så følger det at en diagonalisering av B er gitt ved $B = PCP^{-1}$ (samme P som for A, siden P har egenvektorene som søyler), der

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Lykke til!

(Fortsettes på side 8.)

Matlab-utskrift

```
>> rref([1 0  3 1;
         0 6  7 5;
         2 9 15 8;
         1 6  6 2])

ans =

    1.0000         0         0   -2.0000
         0    1.0000         0   -0.3333
         0         0    1.0000    1.0000
         0         0         0         0

>> rref([1 0  3 1 -2;
         0 6  7 5  6;
         2 9 15 8  5;
         1 6  6 2  4])

ans =

    1.0000         0         0   -2.0000   -2.0000
         0    1.0000         0   -0.3333    1.0000
         0         0    1.0000    1.0000         0
         0         0         0         0         0
```