UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	8. desember 2021.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Se første siden i Inspera.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamensettet består av til sammen 10 deloppgaver som alle gir maksimum 10 poeng ved sensuren. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 9 & 15 & 8 \\ 1 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

a Finn en basis for $\operatorname{Col} A$. Finn også en basis for $\operatorname{Nul} A$.

b Finn en ortogonal basis for $\operatorname{Col} A$.

c Finn den ortogonale projeksjonen av

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

på $\operatorname{Col} A$, og finn alle minste kvadraters løsninger til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Oppgave 2

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 2.)

a Vis at

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for A. Vis videre at $\lambda = -3$ er en egenverdi for A og finn en basis for det tilhørende egenrommet.

b Begrunn at A er ortogonalt diagonaliserbar. Finn en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^T$.

c Betrakt den kvadratiske formen

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Vis at $Q(\mathbf{x}) \leq 6\|\mathbf{x}\|^2$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Her er $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Oppgave 3

La V være vektorrommet med basis $\mathcal{B} = \{\sin t, \cos t\}$ og la $T\colon V \to V$ være definert ved

$$(Tf)(t) = f'(t) + f''(t).$$

a Vis at T er en lineærtransformasjon.

b Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$. La g være en funksjon i V. Bruk $[T]_{\mathcal{B}}$ til å vise at differensialligningen

$$\begin{cases} f'(t) + f''(t) = g(t), \\ f \in V, \end{cases}$$

har nøyaktig én løsning.

Oppgave 4

La A være en 3×3 matrise med egenverdier $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$ og $\lambda_3 = x$ der x er et reelt tall som ikke er lik 3 eller 5. Begrunn at A er diagonaliserbar. Hva er x dersom $\det A = 105$?

Oppgave 5

Anta at A er en 3×3 matrise med diagonalisering $A = PDP^{-1}$, for

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La I være 3×3 identitetsmatrisen og la

$$B = 2I + A - A^2.$$

Vis at dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A, så er $\mathbf{v}$ en egenvektor for B. Er B invertibel? Finn en diagonalisering av B.

Lykke til!

(Fortsettes på side 3.)

Matlab-utskrift

```
>> rref([1 0  3 1;
         0 6  7 5;
         2 9 15 8;
         1 6  6 2])

ans =

    1.0000         0         0   -2.0000
         0    1.0000         0   -0.3333
         0         0    1.0000    1.0000
         0         0         0         0

>> rref([1 0  3 1 -2;
         0 6  7 5  6;
         2 9 15 8  5;
         1 6  6 2  4])

ans =

    1.0000         0         0   -2.0000   -2.0000
         0    1.0000         0   -0.3333    1.0000
         0         0    1.0000    1.0000         0
         0         0         0         0         0
```