TEOREM 3

QR-faktorisering

La A være en $(n \times k)$-matrise med lineært uavhengige søylevektorer, altså

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$$

der $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige. Hvis $\mathbf{q}_1, \ldots \mathbf{q}_k$ er de ortonormale vektorene vi får når vi bruker Gram–Schmidt på $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_k$, har vi

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_k \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{a}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{q}_k, \mathbf{a}_k \rangle \end{bmatrix}$$

BEVIS Vi bruker Gram–Schmidt-prosessen med vektorene $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ som utgangspunkt. På stadium j i prosessen har vi funnet vektorene $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_j$. Vi har

$$\text{Span}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_j\} = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j\},$$

rett og slett fordi vi godt kunne gjort prosessen med kun vektorene $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j$ som utgangspunkt. Ergo kan vektoren $\mathbf{a}_j$ skrives som en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_j$. Ved teorem 13.1.2 har vi da

$$\mathbf{a}_1 = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{q}_2,$$

og så videre. Dette er resultatet som er uttrykt i faktoriseringen $A = QR$ i teoremet: Sjekk det ved å gange sammen matrisene Q og R. Siden hver $\mathbf{a}_j$ ligger i $\text{Span}\{\mathbf{q}_1, \ldots \mathbf{q}_j\}$, men ikke i $\text{Span}\{\mathbf{q}_1, \ldots \mathbf{q}_{j-1}\}$, er alle tallene $\langle \mathbf{q}_j, \mathbf{a}_j \rangle$ langs diagonalen i matrisen R forskjellig fra 0. Ergo er R inverterbar. ■

13.2 OPPGAVER

1. Bruk Gram–Schmidt-prosessen med utgangspunkt i vektorene $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0)$ og $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 0)$ til å finne en ortonormal basis for vektorrommet $\mathbb{R}^3$.

2. Finn en ortonormal basis for underrommet av $\mathbb{R}^3$ utspent av de to vektorene $(1, 0, 1)$ og $(1, 1, 1)$.

3. Finn en ortonormal basis for underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av de tre vektorene $(1, 2, 0, 2)$, $(2, 1, 1, 1)$ og $(1, 0, 1, 1)$.

4. Bruk resultatet av forrige oppgave til å finne en QR-faktorisering av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$