

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1120 — Lineær algebra

Eksamensdag: 11. desember 2024

Tid for eksamen: 09:00 – 13:00

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Redusert trappeform av matriser.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 10 deloppgaver som teller 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine. Du kan henvise til vedlegget med reduserte trappeformer av matriser der du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

Betrakt matrisen A gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

La W betegne kolonnerommet til A , altså $W = \text{Col}A$.

a

Finn en basis for W som består av kolonnevektorer fra matrisen A . Skriv de gjenværende kolonnevektorene i A som lineærkombinasjoner av vektorer fra denne basisen.

b

Betrakt nå matrisen C og vektoren $\mathbf{b}$ gitt ved

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Finn en minste kvadraters løsning av ligningssystemet $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

c

Betrakt $\mathbb{R}^3$ som et indreproduktrom med skalarproduktet (også kalt prikkproduktet). Finn projeksjonen $\text{proj}_W \mathbf{b}$ av vektoren $\mathbf{b}$ ned på W .

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Betrakt de følgende to matrisene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Avgjør om A er diagonaliserbar og om B er diagonaliserbar (du trenger ikke å finne diagonaliseringer). Begrunn svaret ditt.

Oppgave 3

La $\mathbb{P}_3$ betegne vektorrommet av alle polynomer av grad høyst lik 3. Sett $W = \{p \in \mathbb{P}_3 : p(-1) = 0\}$, og definer $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$p_1(t) = t + 1, \quad p_2(t) = t^2 - 1, \quad p_3(t) = t^3 + 1.$$

Sett $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$.

a

Vis at W er et underrom av $\mathbb{P}_3$ og at $\mathcal{B}$ er en basis for W .

b

Definer elementer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$q_1(t) = t + 1, \quad q_2(t) = (t + 1)^2, \quad q_3(t) = (t + 1)^3.$$

Sett $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$. Du kan ta det for gitt at $\mathcal{C}$ også er en basis for W . Finn overgangsmatrisen fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$, altså (3×3) -matrisen M som tilfredsstiller $M[p]_{\mathcal{C}} = [p]_{\mathcal{B}}$ for alle $p \in W$.

c

Vi betrakter W som et indreproduktrom med indreproduktet

$$\langle p, q \rangle = \int_{-2}^0 p(t)q(t) dt, \quad p, q \in W.$$

Du kan ta det for gitt at dette definerer et indreprodukt på W . Finn en ortonormal basis for W .

Oppgave 4

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 3.)

a

Vis at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for A og finn de tilhørende egenverdiene. Finn en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D slik at $P^T A P = D$, der P^T betegner den transponerte av P .

bBetrakt kurven i $\mathbb{R}^2$ bestående av de punkter $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ slik at

$$x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_2^2 = 2.$$

Avgjør om kurven er en sirkel, parabel, ellipse eller hyperbel ved å foreta et variabelskifte som eliminerer kryssleddet. Skisser kurven i planet.

Oppgave 5

I denne oppgaven betrakter vi $\mathbb{R}^n$ som et indreproduktrom med skalarproduktet (også kalt prikkproduktet). Vi anser elementene i $\mathbb{R}^n$ som kolonnevektorer, altså $(n \times 1)$ -matriser. La $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ og betrakt $(n \times n)$ -matrisen

$$R = I - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T$$

der I betegner $(n \times n)$ identitetsmatrisen og $\mathbf{v}_1^T$ betegner den transponerte av $\mathbf{v}_1$, altså en $(1 \times n)$ -matrise. La også $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(\mathbf{x}) = R\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Vis at R er en ortogonal matrise. Finn matriserepresentasjonen til T med hensyn på $\mathcal{B}$, altså $(n \times n)$ -matrisen M slik at $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, og gi en geometrisk tolkning av T .

SLUTT

(Fortsettes på side 4.)

Vedlegg: Redusert trappeform av matriser

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

har redusert trappeform gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 14 & -8 \end{bmatrix}$$

har redusert trappeform gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$