

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Prøveeksamen i: MAT1120 — Lineær algebra

Eksamensdag: 22. november 2024

Tid for eksamen: 09:00 – 13:00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Reduserte trappeformer.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Betrakt følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a Vis at $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ utgjør en basis for $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, og finn koordinatvektorene $[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}}$ og $[\mathbf{v}_4]_{\mathcal{B}}$ til $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

b Finn en minste kvadraters løsning av ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 &= 3, \end{aligned}$$

altså tall $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ som minimerer uttrykket

$$(x_1 - x_2 - 2)^2 + (2x_1 + 3x_2 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_1 - 2x_2 - 3)^2.$$

Oppgave 2

La A være 3×3 -matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 2.)

a Finn egenverdiene til A . Angi en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A .

b For en initialvektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, betrakt følgen av vektorer $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ gitt ved $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ for $k \geq 0$. Bestem de initialvektorer som gjør at denne følgen konvergerer. Bestem også de initialvektorer som gjør at følgen konvergerer mot nullvektoren i $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 3

La $\mathbb{P}_3$ betegne vektorrommet av polynomer av grad høyst lik 3 med de vanlige punktvisse operasjonene for funksjonsrom. Definer en lineær avbildning $\phi: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$\phi(p) = \int_{-1}^1 p(t) dt, \quad p \in \mathbb{P}_3.$$

Sett $W = \ker(\phi)$, kjernen til ϕ . Definer polynomer $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$p_1(t) = t, \quad p_2(t) = 1 - 3t^2, \quad p_3(t) = t^3.$$

a Vis at disse tre polynomene er elementer i W og at de utgjør en basis for W .

I resten av oppgaven betrakter vi $\mathbb{P}_3$ som et indreproduktrom med indreproduktet

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt, \quad p, q \in \mathbb{P}_3.$$

b Finn en ortogonal basis for W .

c Skriv polynomet $p \in \mathbb{P}_3$ gitt ved $p(t) = t^2$ som en sum av et element i W og et element i $W^\perp$. Hva er $\text{proj}_W p$?

Oppgave 4

Betrakt den kvadratiske formen Q på $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2.$$

a Finn en ortogonal 2×2 -matrise P slik at substitusjonen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

gjør $Q(x_1, x_2)$ om til en kvadratisk form uten kryssledd, altså på formen $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ for passende konstanter $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(Fortsettes på side 3.)

b Betrakt kurven i $\mathbb{R}^2$ bestående av de punkter (x_1, x_2) slik at

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0.$$

Representerer denne kurven en parabel, hyperbel, ellipse eller sirkel?
Begrunn svaret ditt og skisser kurven.

Oppgave 5

La A være en symmetrisk $n \times n$ -matrise med ikke-negative egenverdier. Vis at det finnes en $n \times n$ -matrise B slik at $B^2 = A$. (Hint: Betrakt først tilfellet der A er diagonal.)

Radreduerte matriser

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

har redusert trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 13 \\ 3 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

har redusert trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 20/9 \\ 0 & 1 & -1/9 \end{bmatrix}.$$