

15/09/2026

## Avsnitt 5.6 Dynamiske systemer

Tilbake til eksempel: eks 5 i forelesning 14/09.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \text{ dynamisk system } y_{k+1}^{(*)} = D y_k, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \text{og} \quad |\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|.$$

Velger  $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  og  $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\text{Generell løsning til } \odot: y_k = c_1 \cdot 2^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot (0.5)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$c_1, c_2$  skalarer.

Gitt en startverdi  $y_0$ , ser på banen  $y_0, y_1, y_2, \dots$  Kan plottes.

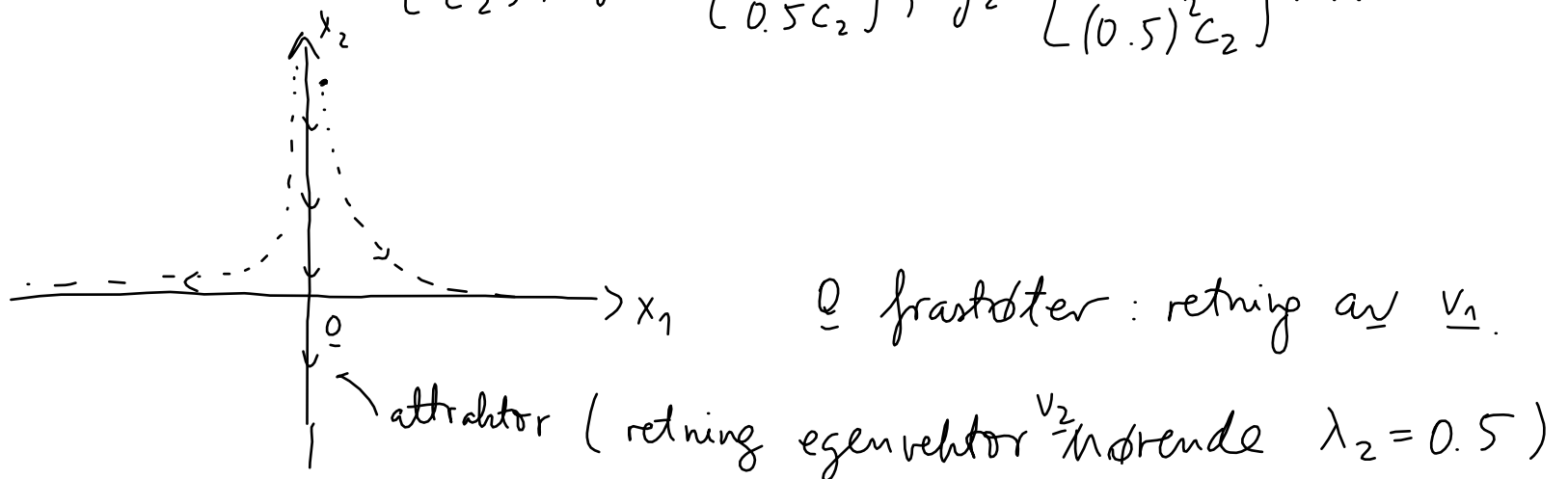
$$\text{Når } k \rightarrow \infty: \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^k = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k = \infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_2^k = \lim_{k \rightarrow \infty} (0.5)^k = 0. \end{cases}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} c_1 \cdot 2^k \\ c_2 \cdot (0.5)^k \end{bmatrix}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Når vi velger } c_2 = 0: y_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, y_1 = \begin{bmatrix} 2c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, y_2 = \begin{bmatrix} 2^2 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dots$$

$$\text{— || — } c_1 = 0: y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix}, y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5c_2 \end{bmatrix}, y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ (0.5)^2 c_2 \end{bmatrix} \dots$$

Grafikk:



For  $A = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{bmatrix}$ .

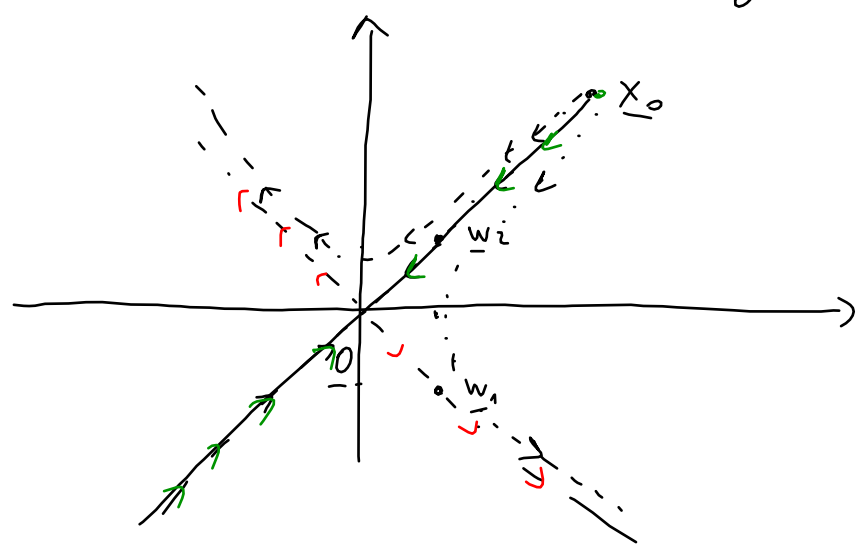
15/09/2026  
(2)

Har  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0.5$  (som for D).

Ved vanlige  
teknikker kan velges  $\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$   $\underline{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; Basis  $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$  basis for  $\mathbb{R}^2$ .

Løsning til  $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$  er på formen:  $\underline{x}_k = C_1 \lambda_1^k \underline{w}_1 + C_2 \lambda_2^k \underline{w}_2$ ,  $C_1, C_2$  skalarer.

Grafisk av banene til løsningen  $\underline{x}_k$ : bruk  $\underline{w}_1$  og  $\underline{w}_2$  som akser



$\underline{0}$  frastøter med hensyn på  $\lambda_1 = 2$   
 $|\lambda_1| > 1$   
 $\underline{0}$  attraktor — u —  $\lambda_2 = 0.5$   
 $|\lambda_2| < 1$ .

Har sett: om matrisen er diagonal  $\leadsto$  bruk kanonisk basis i  $\mathbb{R}^2$  (eller  $\mathbb{R}^n$ ) for å finne løsninger

For  $A$   $n \times n$ , diagonaliserbar (som  $A$  og  $D$  i eksemplet)

Antar  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  egenverdier, og  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$  lin. uav. egenvektorer

$P = [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n]$   $n \times n$  invertibel

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A = P D P^{-1}$$

$\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$  løses ved variabelskifte:  $\underline{x}_k = P \underline{y}_k$

$\Rightarrow P \underline{y}_{k+1} = P D P^{-1} \underline{x}_k$  Ganger  $P^{-1}$  på begge sider

$\Rightarrow$  Løser i stedet

$$\underline{y}_{k+1} = D \underline{y}_k$$

$\underline{y}_k \in \mathbb{R}^n$  skriv som  $y(k)$

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \\ \vdots \\ y_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{bmatrix}$$

separert system

$n$  separerte ligninger.  $\begin{cases} y_1(k+1) = \lambda_1 y_1(k) \\ \vdots \\ y_n(k+1) = \lambda_n y_n(k) \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{x}(k) = P \cdot \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{bmatrix}$$

Tilfellet  $A$  reell og med komplekse egenverdier

15/09/2026  
(3)

Ser på  $n=2$ : Egenverdier  $\lambda_1 = a - ib$ ,  $\lambda_2 = a + ib$ .

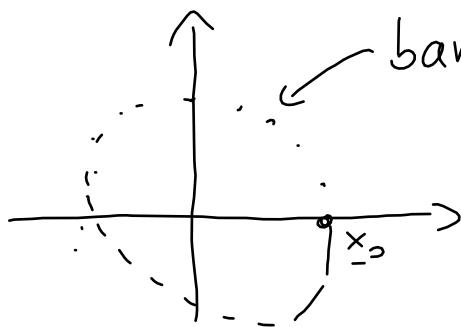
(1)  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ . Eksempel  $A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$  i arsvitt 5.5

$$\lambda_1 = 0.8 - 0.6i, \quad \lambda_2 = 0.8 + 0.6i.$$

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2} = 1.$$

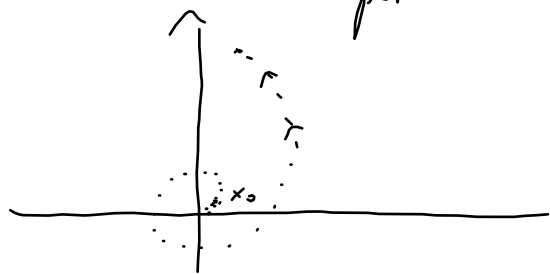
$\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k \rightarrow$  banen blir en ellipse; sjekk eksempel  $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{x}_1 = A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{x}_2 = A \underline{x}_1 \dots$

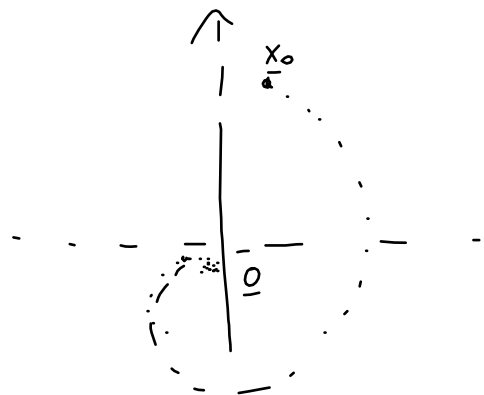


banen til løsninger med start  $\underline{x}_0$ .

(2)  $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1 \rightarrow$  Banen: spiral med  $\underline{0}$  frastøter



(3)  $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ : Banen: spiral med  $\underline{0}$  attraktor:



15/09/2026

(4)

Avsnitt 5.7Ligningssystem:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\
 & x_2' = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\
 & \vdots \\
 & x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n
 \end{aligned}$$

$x_1, \dots, x_n$  : funksjoner  
 $x_1(t), \dots, x_n(t), t \in I$ ,  
 $I = (a, b)$ , eller  $I = \mathbb{R}$ ,  
 eller  $I = [0, \infty)$ .  
 Ønsker: deriverbare

Løsning:  $n$ -tupel  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  som løser (1) for alle  $t \in I$ .  
 $a_{ij}$  reelle skalarer,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Gjør om til:  $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ , en funksjon  $\underline{x}(t): I \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(2) \quad \boxed{\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t)}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$$

Løser ved bruk av egenverdier og egenvektorer til  $A$ .

Merk: Dersom  $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$  og  $\underline{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}$  er tupler av funksjoner

som løser (2), da vil  $\underline{w}(t) = \underline{u}(t) + \underline{v}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) + v_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) + v_n(t) \end{bmatrix}$  også løse (2).

Hvorfor?  $\underline{w}'(t) = \begin{bmatrix} u_1'(t) + v_1'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) + v_n'(t) \end{bmatrix} = \underline{u}'(t) + \underline{v}'(t) = A \underline{u}(t) + A \underline{v}(t) = A \underline{w}(t)$ .

og  $c \underline{u}(t)$  løsning for  $c$  skalar.

La  $V = \{f \mid f: I \rightarrow \mathbb{R}^n, f \text{ deriverbare i hver koordinat}\}$  vektorrom.

For  $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$  i  $V$  er  $\underline{u}$  løsning.

$\Rightarrow$  Løsningsmengden til (2) er et underrom  $H$  av  $V$ .

$\Rightarrow$  Nok å finne en basis for  $H$ .  $\Rightarrow$  Finner dette når  $A$  diagonaliserbar.

Ex ① Velger  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

15/09/2026  
⑤

Find løsninger til (1)  $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \text{ s.d. } \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Separert system})$$

$$\text{eller } \begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) \\ x_2'(t) = -x_2(t) \end{cases}$$

$x_1(t)$  og  $x_2(t)$  løser hver sin ligning.

Fra MAT100 (Kalkulus) har løsninger:  $x_1(t) = C_1 e^{5t}$ ,  $C_1$  skalar  
 $x_2(t) = C_2 e^{-t}$ ,  $C_2$  skalar

Løsningene:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{5t} \\ C_2 e^{-t} \end{bmatrix} = C_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{5t} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}, \quad t \in [0, \infty)$$

$\uparrow \lambda_1 = 5$                        $\uparrow \lambda_2 = -1$

altså:  $\underline{x}(t) = C_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \underline{v}_2 e^{\lambda_2 t}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  egenverdierne til  $A$   
med  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$  egenvektorer

Gjelder generelt, for  $n \times n$  matrise  $A$ , etter diagonalisering.

Merke: Dersom  $\underline{x}(t) = \underline{v} e^{\lambda t}$  er løsning ( $n \times n$ ,  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ )  
 $\underline{v} \neq \underline{0}$ .

$$\Leftrightarrow (\underline{v} e^{\lambda t})' = A(\underline{v} e^{\lambda t})$$

$$\Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} \cdot \underline{v} = e^{\lambda t} \cdot A \underline{v} \quad (e^{\lambda t} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \lambda \underline{v} = A \underline{v}$$

$\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t)$  har løsninger  $\underline{x}(t) = C_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \underline{v}_n e^{\lambda_n t}$ ,  $C_1, \dots, C_n$  skalarer  
 $A$   $n \times n$  diagonaliserbar

Teorem

$\underline{v}_1$  egenvektor til  $\lambda_1$

$\vdots$

$\underline{v}_n$  skalar

$\lambda_n, \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  l.u.

Exo(2) Løs  $x'(t) = Ax(t)$  hvor  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, t \geq 0$ . 15/09/2026  
⑥

• Finner egenverdier:  $(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1.$$

• Finner egenvektorer:  $\lambda_1 = 4$ , radreduserer  $\begin{bmatrix} -3 & 2 & : & 0 \\ 3 & -2 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{velg } \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_2 = -1, \text{ radreduserer } \begin{bmatrix} 2 & 2 & : & 0 \\ 3 & 3 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{velg } \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Fra teorem, får løsninger  $\underline{x}(t) = c_1 \underline{v}_1 e^{4t} + c_2 \underline{v}_2 e^{-t}$ ,  $c_1, c_2$  skaloner.

(Her, nemt å sjekke:  $\underline{u}(t) = \underline{v}_1 e^{4t}$  løsning. Har  $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{4t} \\ 3e^{4t} \end{bmatrix}$ .

$$\underline{u}'(t) = A \underline{u}(t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8e^{4t} \\ 12e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{4t} \\ 3e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Samme for  $\underline{v}(t) = \underline{v}_2 e^{-t}$ .

• Finn løsningen s.a.  $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ . ( $t=0$ ).

Trenger  $c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 = \underline{x}(0)$  ← initieell verdi

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{sd } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Gir } \underline{x}(t) = 3 \underline{v}_1 e^{4t} + \underline{v}_2 e^{-t} = \begin{bmatrix} 6e^{4t} - e^{-t} \\ 9e^{4t} + e^{-t} \end{bmatrix}, t \geq 0.$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{4t} = \infty$  } 0 sadde  
 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$  } punkt.  
frastøter retning  $\underline{v}_1$   
attraktor  $\sim \underline{v}_2$

Tilfeller:  $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \leadsto$  0 frastøter

$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \leadsto$  0 attraktor.

(Se på baner når vi gir verdier til  $t$ .)