

Avsnitt 4.1. Vektorrom og underrom

Kort

- Plan:
- Vi innfører abstrakte vektorrom, som er en felles struktur for ulike matematiske systemer, til eksempel vektorer i plan eller rom, polynomer, matriser av samme størrelse.
 - Vi ser på underrom, som struktur av delmengder av vektorrom, til eksempel en rett linje gjennom origo i planen.

Kort

- Et vektorrom defineres ved hjelp av følgende input:
- en ikke-tom mengde V
 - en operasjon på elementer fra V
 - en operasjon mellom elementer fra V og reelle tall (skalarer)
 - et antall regler (aksioner) som bestemmer hvordan vi kan bruke disse operasjonene.

Akt

Definisjon En ikke-tom mengde V kalles et vektorrom såfremt det er gitt to operasjoner, mer presist addisjon $+$ av elementer fra V og multiplikasjon $\cdot$ av elementer fra V med (reelle) skalarer, s.a. (slik at) for vilkårlige $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ og reelle c, d , det gjelder:

- 1) Summen $\underline{u} + \underline{v}$ av $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er i V .
- 2) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
- 3) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$
- 4) Det finnes et element, betegnet $\underline{0}$, i V , s.a. $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$.
- 5) Til ethvert $\underline{v} \in V$ det fins $-\underline{v} \in V$ s.a. $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$.
- 6) For c reelt og $\underline{v} \in V$ er skalar multiplum $c\underline{v}$ av c med $\underline{v}$ i V .
- 7) $c(\underline{u} + \underline{v}) = c\underline{u} + c\underline{v}$.
- 8) $(c+d)\underline{u} = c\underline{u} + d\underline{u}$.
- 9) $c(d\underline{u}) = (cd)\underline{u}$.
- 10) $1\underline{u} = \underline{u}$.

Merknader:

- a) Ofte utelates 1) og 6), siden de er inneholdt i begrepet "operasjon".
 b) Aksiom 2) betyr at addisjon er abelsk (kommutativ).
 c) Aksiom 3) betyr at addisjon er assosiativ.
 d) Angående aksiom 5); elementet $-v$ kalles invers til v . Vi kan vise at det er unikt.
 e) Elementet 0 fra aksiom 4 kalles nullvektor. Det er unikt i V .

Eksempel 1a) $V = \mathbb{R}$ 0
 med $0 = 0$

1b) $V = \mathbb{R}^2$. Vi betegner elementene som $v = (v_1, v_2)$, hvor v_1, v_2 er reelle tall. Kortfattet: $\mathbb{R}^2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$.

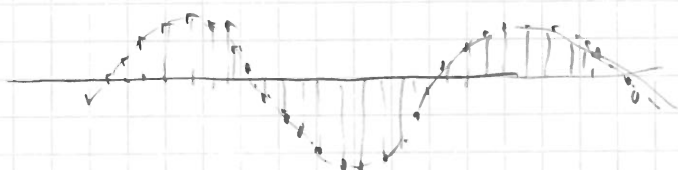
1c) For $n \geq 1$, $V = \mathbb{R}^n = \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}$ er et vektorrom med koordinatvise operasjoner.

Eksempel 2: Mengden av alle rettede piler i $\mathbb{R}^3$ med sumoperasjon gitt ved parallelogramreglen og $c \cdot v$ gitt som pilen med lengde $|c|$ multiplisert med lengden til v mens retningen er den samme som v for $c > 0$, ellers motsatt.

Eksempel 3: $S =$ rommet av alle dobbelt uendelige følger med innganger fra $\mathbb{R}$. Skriver som $S = \{(y_k) \mid y_k \in \mathbb{R} \text{ for alle } k \in \mathbb{Z}\}$.

med $(\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) + (\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots) = (\dots, y_{-1} + z_{-1}, y_0 + z_0, y_1 + z_1, \dots)$
 og $c \cdot (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) = (\dots, cy_{-1}, cy_0, cy_1, \dots)$.

Slike elementer er en model for signaler i digitalt prosessering.



Tiden er diskretisert.

Merk: Vi jobber primært bare med reelle skalarer, og med reelle vektorrom. Vi kan også definere komplekse vektorrom, med skalarer $\lambda \in \mathbb{C}$.

Eksempel 3a: (Polynomier av grad $\leq n$)

La $n \geq 0$ være et heltall. Set P_n til å være mengden av alle polynomier av grad høyst n med reelle koeffisienter.

$$P_n = \{a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\},$$

hvor t er et formelt symbol. Vi definerer operasjoner som følger:

for $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, $q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$ i P_n ,

vi lar summen $(p+q)(t)$ være gitt som

$$(p+q)(t) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + \dots + (a_n+b_n)t^n. \text{ Hvis } c \in \mathbb{R}, \text{ vi}$$

lar skalar multiplikasjonen av c med $p(t)$ være gitt som

$$(cp)(t) = ca_0 + (ca_1)t + \dots + (ca_n)t^n.$$

Nullvektoren i P_n er nullpolynomet med $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. ^{$p(t)=0$}

Vi tillegner ikke en grad til nullpolynomet. Vi tillegner grad 0 til alle polynomier på formen $p(t) = a_0$, med $a_0 \neq 0$.

Hvis $p(t)$ ikke er null-polynomet, vi tillegner graden til å være det største n slik at $a_n \neq 0$.

Eksempel: $p(t) = 1 + 3t$ har grad 1. Spesielt er $p(t) \in P_1$.

Merk at $p(t) \in P_n$ for alle $n \geq 1$.

Men, for eksempel, $p(t) = 3 - 4t^2$ er i P_2 men ikke i P_1 .

Merk: gitt $p(t) \in P_n$, $-p(t)$ er $-a_0 - a_1 t - \dots - a_n t^n$.

Eksempel 3b: (Rommet av alle polynomier med reelle koeff., (og vilkårlig grad))

Merk: Av aksiom 3) kan vi skrive $u_1 + u_2 + \dots + u_k$ for summen av k vilkårlige vektorer i et vektorrom V , for alle $k \geq 1$ heltall.

17/08/2026
(4)

Følgende egenskaper i V kan bevises:

- i) Nullvektoren er unik.
- ii) Inversen til et gitt element er unik.
- iii) $0u = \underline{0}$ for alle $u \in V$.
- iv) $c\underline{0} = \underline{0}$ for alle $c \in \mathbb{R}$.
- v) $-u = (-1)u$ for alle $u \in V$.

Beris for (i): vi antar at V inneholder elementer $\underline{0}$ og $\underline{0}'$ med (4)

$$\begin{array}{c} \underline{0} = \underline{0} + \underline{0}' \stackrel{(2)}{=} \underline{0}' + \underline{0} = \underline{0}' \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ 4 \text{ for } \underline{0}' \quad \quad \quad 4 \text{ for } \underline{0} \end{array}$$

Tilsvarende idé for å vise (ii).

Beris for (iii): Vi har $0u = 0u + \underline{0}$ ved aksiom 4

$$\begin{aligned} &= 0u + (0u + (-0u)) \\ &= (0u + 0u) + (-0u) \\ &= (0+0)u + (-0u) \\ &= 0u + (-0u) = \underline{0}. \end{aligned}$$

Resten: hjemmeoppgave.

Eksempel Vektorrommet av alle funksjoner med ^{gitt} domene D og verdier i $\mathbb{R}$.

V består av funksjoner $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Summen $f+g$ av f, g er $f+g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ for hvert $t \in D$. Skalar multiplikasjon cf defineres som funksjonen $(cf)(t) = cf(t)$ for alle $t \in D$. Nullfunksjonen er $\underline{0}(t) = 0$ for alle $t \in D$.

For eks. $D = \mathbb{R}$, $f(t) = \sin t$, $g(t) = \frac{1}{2} - \cos 3t$, da er

$f+g$ funksjonen $(f+g)(t) = \sin t + \frac{1}{2} - \cos 3t$, for $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{og } (2g)(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \cos 3t = 1 - 2\cos 3t$$