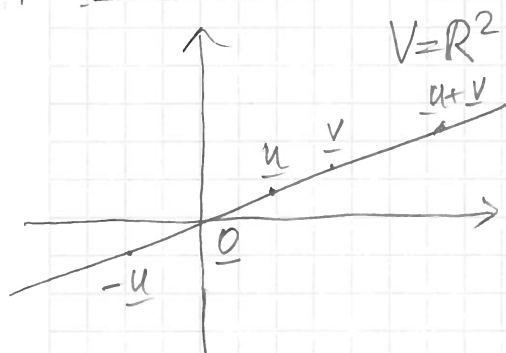


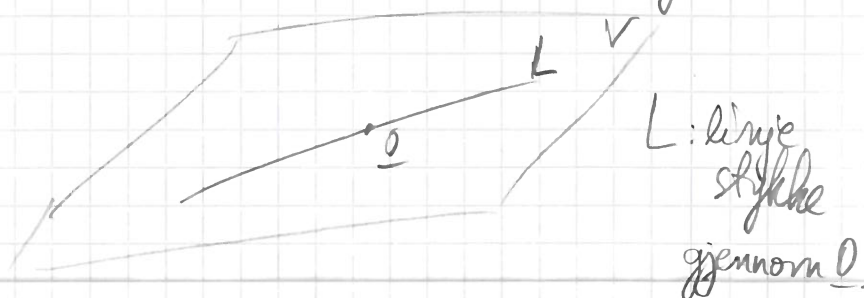
4.1 Underrom av vektorrom

MAT1120 (2)

18/08/2025 (1)



Uten koordinatsystem:



Definisjon Et underrom av et vektorrom V er en endeligmengde H som oppfyller: (a) $0 \in H$.

(b) $u+v \in H$ for hvert par $u, v \in H$.

(c) $cu \in H$ for hvert $u \in H$ og hvert $c \in \mathbb{R}$.

Tord: H skal være en delmengde av V , H skal inneholde 0 , samt H skal være lukket under addisjon og under multiplikasjon med skalarer.

Det gjelder, at H er et vektorrom. Hvorfor? Krav (b) er aksiom 1)

Krav (b) samt aksiom (2) for V gir aksiom (2) for H . Aksiom (4) følger av (a) og (4) for V . Resten følger tilsvarende.
(Ideen: alt gjelder i V , så i H ved (b) og (c).)

Eksempel 6 For vilkårlig V vektorrom er $H = \{0\}$ et underrom.
Kalles det trivielle underromet.

Eksempel 7 $\mathbb{P}$ av $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
 $\mathbb{P}_n$ av $\mathbb{P}$, for $n \geq 1$

• Eksempel 8: $V = \mathbb{R}^3$, $H = \{(0, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

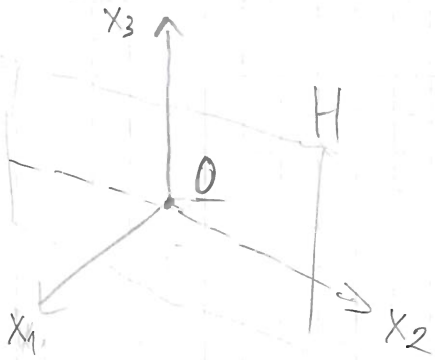
Sjekk (a)-(c) for underrom:

(a) $0 = (0, 0, 0) \in H$ for $s = t = 0$.

(b) La $u, v \in H$. Skriv på formen $u = (0, s, t)$, $v = (0, r, p)$, $s, t, r, p \in \mathbb{R}$.

Ved aksiomene for V er $u + v = (0+0, s+r, t+p) = (0, s+r, t+p)$, som er på formen av elementer i H . For (c), merk at $cu = (c \cdot 0, cs, ct)$ så $cu = (0, cs, ct) \in H$.

Dette underrommet kan vi tegne (generelt ikke): 18/08/2026 ②



H "ser ut" som $\mathbb{R}^2$ inne i $\mathbb{R}^3$
 Men: $\mathbb{R}^2$ er ikke et underrom av $\mathbb{R}^3$
 (det er ikke en delmengde av $\mathbb{R}^3$.)

Underrom utspant av en mengde

Ideen: bruke mindre informasjon enn å angi alle elementene i H for å danne et underrom. (Av "spanne": bredden av håndfladen.)

Eksempel: Gitt V vektorrom og v_1, v_2 , vi definerer !!

$$\text{Span}\{v_1, v_2\} = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Påstand: $\text{Span}\{v_1, v_2\}$ er et underrom (av V).

a) For $c=d=0$ er $0v_1 + 0v_2 = 0 + 0 = 0$, så $0 \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$

b) Gitt u, v i $\text{Span}\{v_1, v_2\}$, skriv på formen

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 \text{ og } v = d_1 v_1 + d_2 v_2 \text{ for } c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Da er } u+v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + d_1 v_1 + d_2 v_2 = (c_1+d_1)v_1 + (c_2+d_2)v_2.$$

ved aksiomene 1, 3 og 8.

Med $a_1 = c_1+d_1, a_2 = c_2+d_2$ i $\mathbb{R}$ er $u+v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$

c) For $c \in \mathbb{R}$ og $c_1 v_1 + c_2 v_2$ i $\text{Span}\{v_1, v_2\}$, er $c(c_1 v_1 + c_2 v_2) = cc_1 v_1 + cc_2 v_2$ også i $\text{Span}\{v_1, v_2\}$

Teorem 1 Gitt et vektorrom V og $v_1, \dots, v_p$ i V ,

vi definerer $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\} = \left\{ \sum_{j=1}^p c_j v_j \mid c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R} \right\}$. Det gjelder, at:

$\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$ er et underrom av V .

Beweis Tilsvarende som i forrige eksempel.

Merke: Hvis H er et underrom på formen $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$, vi kaller $\{v_1, \dots, v_p\}$ for generatormengden til H .

Avsnitt 4.2

Def Nullrommet til en $m \times n$ matrise A er mengden av alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ s.d. $A\underline{x} = \underline{0}$. Vi skriver $\text{Nul}(A) = \{\underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ og } A\underline{x} = \underline{0}\}$.

↑ Merk: dette er nullvektoren i $\mathbb{R}^m$.

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$, 2×3 matrise.

$$\text{Nul}(A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}. \text{ Eller } \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ s.d. } \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -5x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Def: Kolonnerommet (Søylerommet) til en $m \times n$ matrise A er underromet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene til A . Belegnes $\text{Col}(A)$.

Eksempel: A som ovenfor.

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Både $\text{Nul}(A)$ og $\text{Col}(A)$ er sentrale begreper fremover.

Vil vise: $\text{Nul}(A)$ er alltid et underrom av $\mathbb{R}^n$.

$\text{Nul}(A)$ har en generator mengde med # elem. lik antallet av frie variabler i $[A \ 0]$ på rad-redusert echelon form.

$$\text{Col}(A) = \{\underline{b} \mid \underline{b} \in \mathbb{R}^m \text{ og } \underline{b} = A\underline{x} \text{ for et } \underline{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Teorem 2 Nullrommet til en $m \times n$ matrise er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

Beris: Gitt A , $m \times n$ matrise, vi har at $\text{Nul}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Klar, at $A\underline{0} = \underline{0}$, så $\underline{0} \in \text{Nul}(A)$.

mere: Nullvektoren i $\mathbb{R}^n$

Gitt $\underline{u}, \underline{v} \in \text{Nul}(A)$, vi har $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ i $\mathbb{R}^m$.

så $\underline{u} + \underline{v} \in \text{Nul}(A)$.

For $c \in \mathbb{R}$ og $\underline{u} \in \text{Nul}(A)$ er $A(c\underline{u}) = cA(\underline{u}) = c \cdot \underline{0} = \underline{0}$ så $c\underline{u} \in \text{Nul}(A)$.

De tre betingelser for underrom, (a) - (c), gjelder.

Les
skriv

Eksempel: Gitt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $\underline{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Er $\underline{u} \in \text{Null}(A)$?

Ja, nemt å sjekke: $A\underline{u} = \begin{bmatrix} 4+0-4 \\ -4+0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, så svaret er "ja".

Frengangs måte for å bestemme $\text{Null}(A)$ til gitt A

Ser på eksempel 3.

$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$. Finne rad redusert echelon form for $[A \ \underline{0}]$

$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{3 \text{ og } 2 \text{ legges til} \\ (-2) \text{ og legges til}}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Bytter disse, del på 5}}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2) \\ (-1)}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Herfra
 $B \quad x_2, x_4, x_5$ frie variabler

(II) Løser ligningssystemet $B\underline{x} = \underline{0}$, B rad redusert echelon matrise.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$
 Finner x_1, x_3 ved hjelp av frie variabler.

$$x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5$$

$$x_3 = -2x_4 + 2x_5$$

Samme mengde som for.

Løsningene til $A\underline{x} = \underline{0}$, et homogent system, er gitt ved $B\underline{x} = \underline{0}$,

med $\underline{x} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \stackrel{(\text{III})}{=} x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (*)$

Hvis $c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$
 $\Downarrow$
 $\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \text{l.u.}$

Skriver $\underline{x}$ som en lineær kombinasjon av konstante vektorer med de frie variablene x_2, x_4, x_5 som koeffisienter (vektorer).

Har vist: for $\underline{x} \in \text{Null}(A)$ vi har $\underline{x} \in \text{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Det er nemt å sjekke at $A(c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3) = \underline{0}$ for alle c_1, c_2, c_3 i $\mathbb{K}$, så i alt er $\text{Null}(A) = \text{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Viktig: $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ er lineært uavhengig mengde.

Kolonneområdet til en $m \times n$ matrise A med kolonnevektorer $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ i $\mathbb{R}^m$ er: $\text{Col}(A) = \text{Span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\}$.

Teorem ③ Kolonneområdet til en $m \times n$ matrise er et underrom av $\mathbb{R}^m$.

Beris: $\text{Col}(A)$ er en delmengde av $\mathbb{R}^m$ og et underrom som følger av Teorem 1.

Merk: $\text{Col}(A) = \{\underline{b} \mid \underline{b} \in \mathbb{R}^m \text{ og } \underline{b} = A\underline{x} \text{ for et } \underline{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

Dermed er $\text{Col}(A)$ bildet (rekkevidet) til den lineære transformasjonen $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T_A \underline{x} = A\underline{x}$.

Eksempel Finn A s.a. $H = \text{Col}(A)$, hvor $H = \left\{ \begin{bmatrix} -a \\ a-3b \\ a+2b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
Har sett at $H = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Da er $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 2×3 matrise.

Merknad For en $m \times n$ matrise A har vi, at $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ hvis og bare hvis $A\underline{x} = \underline{b}$ har en løsning for hvert $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$.

For en $m \times n$ matrise A , følgende holder:

$\text{Nul}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, underrom	$\text{Col}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$, underrom
• Gitt implisitt: løser $A\underline{x} = \underline{0}$	• Gitt eksplisitt som elementer i $\text{Span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$
• Krevende å angi vektorer i $\text{Nul}(A)$	• Raskt å angi vektorer i $\text{Col}(A)$
• Raskt å avgjøre om en gitt $\underline{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er i $\text{Nul}(A)$: sjekk om $A\underline{v} = \underline{0}$	• Krevende å angi om $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ er i $\text{Col}(A)$: løs $A\underline{x} = \underline{b}$
• $\text{Nul}(A) = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{0}$ har kun løsningen $\underline{x} = \underline{0}$	• $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{b}$ har løsning for hvert $\underline{b}$
$\Leftrightarrow T_A$ er 1-1	$\Leftrightarrow T_A$ er surjektiv (på)