

Afsnitt 5.1 Eigenverdier og egenvektorer

Til motivasjon: la $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 2×2 matrise ($m=n=2$).

$\Rightarrow$ Lineær transformasjon $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T_A(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$, for $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$.
 $\uparrow$
 matrise multiplikasjon.

T_A flytter vektorer $\underline{x}$ i $\mathbb{R}^2$ inn på $A \cdot \underline{x}$. Noen er spesielle for denne A .

For $\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er $A \cdot \underline{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \underline{v}$.

Mens, for eksempel, for $\underline{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ er $A \underline{w} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ikke et multiplum av $\underline{w}$.

Ønsker: beskrive vektorer slik som $\underline{v}$, hvor $A \underline{v}$ er et multiplum av $\underline{v}$.

Definisjon: La A være en $n \times n$ matrise.

(a) En vektor $\underline{x}$ i $\mathbb{R}^n$ med $\underline{x} \neq \underline{0}$ er en egenvektor for A dersom det fins en skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ s.a. $A \underline{x} = \lambda \underline{x}$.

(b) En skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi til A dersom det fins $\underline{x} \neq \underline{0}$ i $\mathbb{R}^n$ med $A \underline{x} = \lambda \underline{x}$. Vi kaller slik $\underline{x}$ for en egenvektor til A hørende til (egenverdi) λ .

Merk: En egenverdi kan være 0. (Dersom $A \underline{x} = 0 \cdot \underline{x} = \underline{0}$ har ikke-trivielle løsninger $\underline{x} \neq \underline{0}$).

En egenvektor må være $\neq \underline{0}$.

Ser på eks. ① $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Fra $A \underline{v} = 2 \underline{v}$, med $\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, ser vi:
 $\underline{v}$ er en egenvektor hørende til egenverdi $\lambda = 2$.

Spørsmål: Fins det andre egenverdier? Andre egenvektorer?

La $\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Det er nemt å sjekke om $\underline{x}$ er en egenvektor til A . Klart, at $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Regner ut: $A \underline{x} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \underline{x}$.

$\uparrow$
 $\underline{x}$ er en egenvektor hørende til $\lambda = 1$.
 $\nearrow$
 er en egenverdi til A .

Hva med å teste for om et λ er en egenverdi? ②

Eksempel 2 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Vis, at $\lambda = -4$ er en egenverdi. Finn en egenvektor.

$\lambda = -4$ er egenverdi $\Leftrightarrow$ det fins $\underline{x} \neq \underline{0}$ s.a. $A\underline{x} = -4\underline{x}$

$\Leftrightarrow$ —||—||— s.a. $A\underline{x} + 4\underline{x} = \underline{0}$

$\Leftrightarrow$ —||—||— s.a. $A\underline{x} + 4 \cdot I \underline{x} = \underline{0}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2×2

$\Leftrightarrow$ —||— $(A + 4I) \cdot \underline{x} = \underline{0}$ identitetsmatrise

$\Leftrightarrow$ —||— $[A + 4I : \underline{0}]$ har frie variabler i redusert trappeform.

$$A + 4I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & : & 0 \\ 5 & 6 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 6 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

pivot $\uparrow$ fri variabel $\Rightarrow$ Vi kan slå fast, at $\lambda = -4$ er en egenverdi.

Finne en egenvektor: Løser $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ for $\underline{x} \neq \underline{0}$.

$$\text{Løsning er } \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, 5x_1 + 6x_2 = 0 \quad \Downarrow \quad x_1 = -\frac{6}{5}x_2$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}. \text{ Kan velge: } x_2 = 5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$ er en egenvektor hørende til $\lambda = -4$.

Men: alle $\underline{v} = c \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$, for $c \neq 0$, er egenvektorer hørende til -4 .

$\underline{v} \in \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\left(\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \right)$ er et underrom av $\mathbb{R}^2$

$\underline{v} \neq \underline{0}$

består av $\underline{0}$ og alle egenvektorene hørende til $\lambda = -4$.

Kalles egenrommet hørende til $\lambda = -4$.

Eksempel ③ $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$, 3×3 matrise.

Vis: at $\lambda = 2$ er en egenverdi.

Finn: egenrommet og en basis for dette.

Løsning: $\lambda = 2$ egenverdi $\Leftrightarrow (A - 2I)\underline{x} = \underline{0}$ har ikke trivielle løsninger.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3×3 identitetsmatrisen.

Finner trappeform for $[A - 2I : \underline{0}]$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [A - 2I : \underline{0}] \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$\uparrow$ x_1 : 1 pivot $\uparrow$ x_2 $\uparrow$ x_3
frie variabler.

$$\rightsquigarrow 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0. \text{ Løsningsmengden til } (*) \text{ er } \underline{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Skriv: $\underline{x} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi konkluderer: $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ er begge egenvektorer hørende til $\lambda = 2$.

$\uparrow$ $\underline{v}_1 \neq 0$ $\uparrow$ $\underline{v}_2 \neq 0$

Ses lett: $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ l. u. (er ikke multiplum av hverandre)

Alt: $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ er en basis for egenrommet hørende til $\lambda = 2$.

Av $A\underline{v}_1 = 2\underline{v}_1$ fås: $A(\underbrace{2\underline{v}_1}_{\text{matrise mult.}}) = 2 \cdot (A\underline{v}_1) = 2(2\underline{v}_1)$. Se $\underline{u} = 2\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. (uten brøk).

Også $\{\underline{u}, \underline{v}_2\}$ er en basis for egenrommet hørende til $\lambda = 2$.

Merh:

Dersom λ er en egenverdi til en $n \times n$ matrise, så er

$$\text{Nul}(A - \lambda I) : \text{egenrommet hørende til } \lambda; \text{Nul}(A - \lambda I) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Merh: Dersom $\underline{x}$ er en egenvektor for A , $n \times n$ matrise, hørende til en egenverdi λ , så er $c\underline{x}$, med $c \neq 0$ i $\mathbb{R}$, også en egenvektor hørende til λ . $[A(c\underline{x}) = c \cdot (A\underline{x}) = c \cdot (\lambda \underline{x}) = (c\lambda) \underline{x} = \lambda \cdot (c\underline{x})].$

Avsnitt 5.2 Den karakteristiske ligningen.

Def Anta, at A er en $n \times n$ matrise, for $n \geq 1$. La I være $n \times n$ identitetsmatrisen. Den karakteristiske ligning er:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

(Tenk: λ er det ukjente.)

Ex. 6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Har $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix}$.

Den karakteristiske lign. er

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix} \stackrel{(1)}{=} 0.$$

$$\left(\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc. \right)$$

$$(1) \Leftrightarrow (3-\lambda) \cdot (-\lambda) - 1 \cdot (-2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow -3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) = 0. \quad (\text{Bruk a,b,c formelen for Kalkulus}).$$

$$\Rightarrow (1) \text{ har 2 løsninger, } \boxed{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2}.$$

Men, $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi $\Leftrightarrow (A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ har løsninger $\underline{x} \neq \underline{0}$.

For $A: n \times n$ og

$I: n \times n$ identitetsmatrisen.

$\Leftrightarrow A - \lambda I$ er ikke invertibel.

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$

$\Leftrightarrow \lambda$ er en løsning til den karakteristiske ligning.

MAT 1110.

Så, for $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ er egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$.

Egenvektorer: hørende til $\lambda_1 = 1$; $A - 1I = A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ser: $[A - 1I : 0] \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ hvor $2x_1 + x_2 = 0$.

$\uparrow$ fri variabel
 $\text{Nul}(A - I) = \left\{ x_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Da er $\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en egenvektor til $\lambda_1 = 1$.

$\lambda_2 = 2$: $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$; Egenvektorene er $\underline{x} \neq \underline{0}$ som

løser $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{0}$, eller $\underline{x} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$.

$\uparrow$ x_1 $\uparrow$ x_2 fri
 $\underline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor.

6

For matriser av orden $n \times n$, $n \geq 3$.

$n=3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Minner om: $\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

↑ bruk 1^{ste} rad

har fjernet rad 1 og kolonne 1 fra A

har fjernet rad 1 og kolonne 2

har fjernet rad 1 og kolonne 3

Husk: for 3×3 matrise A, må regne ut $\det(A - \lambda I)$ for å finne egenverdier.
(a_{11} blir $a_{11} - \lambda$, a_{22} blir $a_{22} - \lambda$ og a_{33} blir $a_{33} - \lambda$).

Similaritet: A, B $n \times n$ matriser er similære dersom det fins P invertibel

↪ skriver $A \sim B$, hvor $B = P A P^{-1}$

Har: $A \sim B \Rightarrow \det A = \det B$