

21/09/2026

Avsnitt 5.7

Lineær algebra i teorien for differensialligninger

Ønsker: $(1) \underline{x}'(t) = A \underline{x}(t)$ A $n \times n$ matrise

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \quad x_1(t), \dots, x_n(t) \text{ funksjoner} \\ \text{definert på intervall } I, \text{ f. eks. } [0, \infty).$$

Eller: $\underline{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.

Merk: (1) er kortform av ligningsystem: $\left. \begin{array}{l} n \text{ diff.} \\ \text{ligninger} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t). \end{array}$
(Alle er lineære: $a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{nn}$ skalarer.)

Forrige time: A er diagonaliserbar, så har egenvektorer

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$, lineært uavh,

hørende til $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, reelle egenverdier.

Løsning: er en lineær kombinasjon av $\underline{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \underline{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \underline{v}_n e^{\lambda_n t}$

Komplekse egenverdier

Her: A $n \times n$ reell matrise med to komplekse egenverdier:

$\{\lambda, \bar{\lambda}\} \rightarrow$ kommer alltid i par;

og $\rightarrow$ Når λ er egenverdi, $\underline{v}$ er egenvekt.

og $\{\underline{v}, \bar{\underline{v}}\} \rightarrow$ egenvektorer: $A \underline{v} = \lambda \underline{v}$ og $A \bar{\underline{v}} = \bar{\lambda} \bar{\underline{v}}$.

(Når $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ er $\bar{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$.)

Ønsker nå: løser $(2) \underline{x}'(t) = A \underline{x}(t)$ Hvordan ser løsningene ut?

Løsninger til $\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t)$, A $n \times n$ har $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ egenverdier
og $\{\underline{v}, \bar{\underline{v}}\}$ egenvektorer. 21/09/2026

(I) Komplekse løsninger: $\underline{x}(t)$ med verdier i $\mathbb{C}^n$. Til $\lambda, \bar{\lambda}$ finner vi

Før $\underline{x}_1(t) = \underline{v} e^{\lambda t}$ og $\underline{x}_2(t) = \bar{\underline{v}} e^{\bar{\lambda} t}$. (Samme måte som for reelle egenverdier.)

($e^{\lambda t}$ defineres som en potensrekke, se MAT 1100)

(II) Reelle løsninger: Bruk, at når $z = x + iy$ er et komplekst tall, er $\bar{z} = x - iy$, den konjugerte.

$$\Rightarrow \begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{x + iy + x - iy}{2} = \frac{2x}{2} = x. \quad (i^2 = -1) \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{x + iy - (x - iy)}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y. \end{aligned}$$

Definisjon: (Den komplekse eksponentialfunksjon)

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \text{ for } z = x + iy \text{ komplekst.}$$

Spenelt: for $\lambda = a + ib$ og $t \geq 0$ reelt tall, $\lambda t = at + ibt$,

$$\Rightarrow e^{\lambda t} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt), \quad t \geq 0$$

Metoden: Fra en kompleks løsning $\underline{x}_1(t) = \underline{v} e^{\lambda t}$, $A \underline{v} = \lambda \underline{v}$,

får to reelle løsninger: $y_1(t) = \operatorname{Re}(\underline{x}_1(t))$ og $y_2(t) = \operatorname{Im}(\underline{x}_1(t))$.

Ser på konkret eksempel.

21/09/2026

(3)

Eks. (Oppg. 10).

Gitt $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, finn reelle løsninger til $\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t)$.

Først, løser karakteristisk ligning:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (3 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \cdot (-2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = 2 + i, \text{ og } \bar{\lambda} = 2 - i}$ Egenverdi-par til A .

Finner egenvektor til λ :

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (2 + i) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (2 + i) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 3v_1 + v_2 = (2 + i)v_1$$

$$-2v_1 + v_2 = (2 + i)v_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{(1 - i)v_1 + v_2 = 0} \\ -2v_1 - (1 + i)v_2 = 0 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (1 - i)v_1 + v_2 = 0 \\ -2v_1 - (1 + i)v_2 = 0 \end{matrix}} \right\} \text{samme avhengighetsrelasjon}$$

Gir verdi $v_1 = 1$, $v_2 = -(1 - i) = -1 + i$.

$\Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + i \end{bmatrix}$ egenvektor hørende $\lambda = 2 + i$.

$$\boxed{\begin{matrix} a = 2 \\ b = 1 \end{matrix}}$$

Dette gir komplekse løsninger til $\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t)$:

$$\underline{x}_1(t) = \underline{v} e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + i \end{bmatrix} \cdot e^{2t} (\cos t + i \sin t), \quad \underline{x}_2(t) = \bar{\underline{v}} e^{\bar{\lambda} t}$$

Finner $\operatorname{Re}(\underline{x}_1(t))$ og $\operatorname{Im}(\underline{x}_1(t))$

$$\begin{aligned} \underline{x}_1(t) &= \begin{bmatrix} e^{2t} \cos t + i e^{2t} \sin t \\ -e^{2t} \cos t - i e^{2t} \sin t + i e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t} \cos t \\ -e^{2t} (\cos t + \sin t) \end{bmatrix}}_{\underline{y}_1(t)} + i \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t} \sin t \\ e^{2t} (\cos t - \sin t) \end{bmatrix}}_{\underline{y}_2(t)} \end{aligned}$$

Alternativ måte å skrive de to reelle løsningene:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \sin t \\ y_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \cos t \\ &\quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$y_1(t)$ og $y_2(t)$ er reelle løsninger til $\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t)$



$$\text{Siden } \left(\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)$$

Nok å finne ^{to} reelle løsninger fra $\underline{x}_1(t)$.

Generell A med $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ egenverdier
 $\{\underline{v}, \bar{\underline{v}}\}$ egenvektorer.

21/09/2026
 (4)

For enkelthets skyld, la $n=2$.

Ønsker: finne to reelle løsninger fra en kompleks løsning $\underline{x}_1(t)$

$$\underline{x}_1(t) = \underline{v} e^{\lambda t}, \quad \underline{v} \in \mathbb{C}^2, \quad e^{\lambda t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \text{ for } \lambda = a + ib.$$

Her $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(v_1) + i \operatorname{Im}(v_1) \\ \operatorname{Re}(v_2) + i \operatorname{Im}(v_2) \end{bmatrix}$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \operatorname{Re}(v_1) \\ \operatorname{Re}(v_2) \end{bmatrix}}_{=\operatorname{Re}(\underline{v}) \in \mathbb{R}^2} + i \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \operatorname{Im}(v_1) \\ \operatorname{Im}(v_2) \end{bmatrix}}_{=\operatorname{Im}(\underline{v}) \in \mathbb{R}^2} \text{ i vektorrommet } \mathbb{C}^2.$$

$$\underline{x}_1(t) = \underbrace{(\operatorname{Re}(\underline{v}) + i \operatorname{Im}(\underline{v}))}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{e^{at}(\cos bt + i \sin bt)}_{\text{funksjon (ganges inn i hver koordinat av vektoren)}} \quad \underline{v} \in \mathbb{C}^2$$

$$= \operatorname{Re}(\underline{v}) \cdot e^{at}(\cos bt + i \sin bt) + i \operatorname{Im}(\underline{v}) \cdot e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

$$= e^{at} \left[\underbrace{\operatorname{Re}(\underline{v}) \cos bt - \operatorname{Im}(\underline{v}) \sin bt}_{\text{Re}(\underline{x}_1(t)) = y_1(t)} + i \underbrace{e^{at} [\operatorname{Re}(\underline{v}) \sin bt + \operatorname{Im}(\underline{v}) \cos bt]}_{\text{Im}(\underline{x}_1(t)) = y_2(t)} \right]$$

$$= \operatorname{Re}(\underline{x}_1(t)) = y_1(t)$$

↑
 notation

$$= \operatorname{Im}(\underline{x}_1(t)) = y_2(t)$$

↑
 notation

Eksempel: $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix}$, $\operatorname{Re}(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\operatorname{Im}(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$)

Generell reell løsning: $\underline{w}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, c_1, c_2 reelle skalarer.

Tilbake til eks. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t)$. Finn reelle løsninger $\underline{w}(t)$ med $\underline{w}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Løser $c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. $y_1(0) = \operatorname{Re}(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $y_2(0) = \operatorname{Im}(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Merk: $\{\operatorname{Re}(\underline{v}), \operatorname{Im}(\underline{v})\}$ er lin. uav. i $\mathbb{R}^2$.

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Svar $\Rightarrow \underline{w}(t) = 2 e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -(\cos t + \sin t) \end{bmatrix} + 5 e^{2t} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\sin t + \cos t \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$

21/09/2026

Avsnitt 5.8

Potensmetoden til estimering av dominerende egenverdi

Problem: $A_{n \times n}$

For stort n , ingen formel til å beregne egenverdier.

Bruker estimerer.

Situasjon: Antar A diagonaliserbar, med

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ egenvektorer i $\mathbb{R}^n$, ordnet s.a.

tilhørende egen. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ oppfyller $|\lambda_1| \text{ (dominerende) } > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

For $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$: $\underline{x} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n$

$$A \underline{x} = c_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + c_2 \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \lambda_n \underline{v}_n$$

$$A^k \underline{x} = c_1 \lambda_1^k \underline{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \underline{v}_2 + \dots + c_n \lambda_n^k \underline{v}_n \quad / \text{ del på } \lambda_1^k$$

$$\frac{1}{\lambda_1^k} A^k \underline{x} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \underline{v}_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \underline{v}_n$$

Står igjen.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k = 0 \dots$$

$\Rightarrow$ Estimat til en egenvektor $\underline{v}_1$ hørende $\lambda_1 \leadsto$ Deretter λ_1

Ekst: $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Bruk potensmetoden.

$$(6 - \lambda)(2 - \lambda) - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 7} > \lambda_2 = 1.$$

Trinn 1: Velg $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

største absolutt verdi av innganger = 1.

$$A \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mu_0 = 5, \text{ størst modulus}$$

$$\text{Sett } \underline{x}_1 = \frac{1}{\mu_0} A \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Gjenta: } A \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 9/5 \end{bmatrix} \quad \mu_1 = 8$$

$$\underline{x}_2 = \frac{1}{\mu_1} A \underline{x}_1$$

Ved $k=5$: $\underline{x}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,20007 \end{bmatrix}$, $A \underline{x}_5 = \begin{bmatrix} 7,00036 \\ 1,40014 \end{bmatrix}$, $\mu_5 = 7,00036 \sim \lambda_1$ ved $k=5$

$\sim$ egenvektor $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2 \end{bmatrix}$ til λ_1 .