

22/09/2026

①

Afsnitt 5.8 Iterative metoder for egenverdiestimering

(I) Potensmetoden.

Antag: A $n \times n$ matrice, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ ordnet basis for $\mathbb{R}^n$
bestående af egenvektorer, for egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, s. a.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Om λ_1 ikke er kjent, kan vi estimere den ved følgende metode:

• Velg $\underline{x} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n$, $\underline{x}$ vilkårlig, $c_1, \dots, c_n$ skalarer (i $\mathbb{R}$)

• Regn ut $A\underline{x} = A(c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n)$

$$= c_1 (A\underline{v}_1) + c_2 (A\underline{v}_2) + \dots + c_n (A\underline{v}_n)$$

$$= c_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + c_2 \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \lambda_n \underline{v}_n, \quad c_1 \lambda_1, \dots, c_n \lambda_n \text{ skalarer.}$$

• Regn ut $A(A\underline{x}) = A^2 \underline{x}$, $A(A^2 \underline{x}) = A^3 \underline{x}$...

Ved $k \geq 1$ er $A^k \underline{x} = c_1 \lambda_1^k \underline{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \underline{v}_2 + \dots + c_n \lambda_n^k \underline{v}_n$. (Antag $\lambda_1 \neq 0$). Del på λ_1^k

$$\frac{1}{\lambda_1^k} A^k \underline{x} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \underline{v}_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \underline{v}_n$$

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1, \dots, \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_j}{\lambda_1} = 0 \text{ for } j=2, 3, \dots, n.$$

For stort nok k , vil $A^k \underline{x} \approx (\lambda_1^k c_1) \underline{v}_1$ (A^k = potens k av matrisen A)

Når $c_1 \neq 0$ vil vektoren $A^k \underline{x}$ være approks. et multiplum av $\underline{v}_1$.

$\Rightarrow$ estimat $\underline{w}_1$ av $\underline{v}_1$

Anvend så A , da vil $A\underline{w}_1 \approx \lambda_1 \underline{w}_1$, og vi estimerer λ_1 .

$\rightarrow$ Se neste side.

Potensmetoden

A $n \times n$ matrise
som i forrige side

22/09/2026

(2)

Trinn 1. Velg $\underline{x}_0$ i $\mathbb{R}^n$ med 1 som største koordinat (i absolutt verdi).

Trinn 2. For $k=0, 1, 2, \dots$

a. Regn ut $A \underline{x}_k$.

b. Velg en inngang i $A \underline{x}_k$, kall det μ_k , med størst absoluttverdi.

c. Sett $\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{\mu_k} A \underline{x}_k$. (Dette inneholder minst en av inngangene i $\underline{x}_{k+1}$ er lik 1.)

Kan vises: For nesten alle valg av $\underline{x}_0$ vil

$$\underline{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \underline{v}_1 \quad \text{og} \quad \mu_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_1, \quad \lambda_1 \text{ dominerende egenverdi.}$$

Dersom: $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$, vil konvergen være rask, så ^{for} små verdier av k
 $\uparrow$ mye større

vil $\underline{x}_k \sim \underline{v}_1$ egenvektor for λ_1 .

Ekse: $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 1$, så $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$.

Start med $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$k=0: A \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \mu_0 = 5 \Rightarrow \underline{x}_1 = \frac{1}{\mu_0} A \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

$$k=1: A \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 9/5 \end{bmatrix}, \mu_1 = 8 \Rightarrow \underline{x}_2 = \frac{1}{\mu_1} A \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,225 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$k=5: A \underline{x}_5 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,20007 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,00036 \\ 1,40014 \end{bmatrix}, \mu_5 = \underline{7,00036} \sim \lambda_1.$$

$\uparrow$
 $\underline{x}_k$

$$\underline{x}_k \sim \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

22/09/2026
③

(II) Den inverse potensmetoden.

Brukes til å gi estimat av en vilkårlig egenverdi λ for en $n \times n$ matrise, forutsatt at man har tilgang på en god initiell tilnærming α til λ (empiriske studier)

Ideen: Dersom α er slik at $\det(A - \alpha I) = 0 \Rightarrow \alpha$ egenverdi. Ferdig!

I praksis er $\alpha \neq \lambda$.

Sett $\mu = \frac{1}{\alpha - \lambda}$ og $B = (A - \alpha I)^{-1}$ som hjelpemiddel.

Oftest nok: μ er dominerende egenverdi til $B \leadsto$ potensmetoden.

Typisk god situasjon:

gitt: A egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (eksistens er påvist teoretisk, men verdiene er ikke kjent.)

$\alpha \approx \lambda_1$ (fra empiriske observasjoner)

Gjelder: $B = (A - \alpha I)^{-1}$ vil ha egenverdier $\frac{1}{\alpha - \lambda_1}, \dots, \frac{1}{\alpha - \lambda_n}$, med de samme egenvektorene $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ som $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Hvis $|\alpha - \lambda_1| \ll |\alpha - \lambda_j|$ for $j = 2, \dots, n$, (α tilnærmer λ_1 mye bedre enn α tilnærmer $\lambda_2, \dots, \lambda_n$)

$$\text{so er } \frac{1}{|\alpha - \lambda_1|} \gg \frac{1}{|\alpha - \lambda_j|}$$

$\Rightarrow$ dominerende.

Forklaring: Anta $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$, $\underline{v} \neq 0$, og $\alpha \neq \lambda$.

$$\underline{v} = I\underline{v} = 1 \cdot I\underline{v}$$

$$= (\lambda - \alpha)^{-1} \cdot (\lambda - \alpha) \cdot I\underline{v}$$

$$= (\lambda - \alpha)^{-1} (\lambda \underline{v} - \alpha \underline{v})$$

$$= (\lambda - \alpha)^{-1} (A\underline{v} - \alpha \cdot I\underline{v}) = (\lambda - \alpha)^{-1} ((A - \alpha I)\underline{v})$$

$$= (A - \alpha I) ((\lambda - \alpha)^{-1} \underline{v})$$

$$\leadsto (A - \alpha I)^{-1} \underline{v} = \frac{1}{\lambda - \alpha} \underline{v}.$$

22/09/2026
(4)

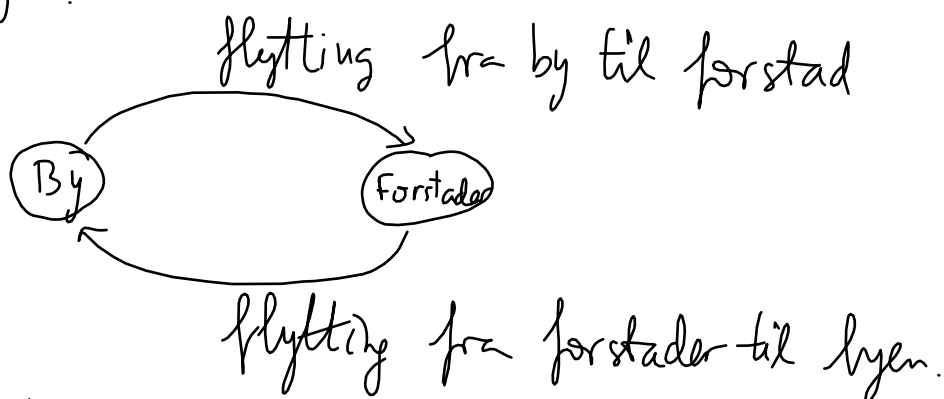
Avsnitt 5.9 Markovkjeder

Formål: studere oppførsel over tid av stor-skala systemer ved en bestemt form for overgang fra et tidspunkt til det neste.

Grunleggende eksempel (motivasjon)

System: befolkning

Tilstander: $\begin{cases} \text{by} \\ \text{forstader} \end{cases}$



Start: $a = 60\%$ bor i forstader
 $b = 40\%$ — i — byen

Merk $a + b = 100\% = 1$.

Tilstandsvektor: $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$

a : sannsynligheten for å være i tilstand 'bo i forstad'

b : ————— "bo i byen"

Evolusjonen av systemet beskrives ved en regel; f.eks. i løpet av 1 år,

$\frac{2}{10}$ av befolkning i forstader flytter til byen; igjen $\frac{8}{10}$ i forstader } denne overgangen $\rightarrow$
 $\frac{1}{10}$ — i — byen — i — forstader; igjen $\frac{9}{10}$ i byen.

etter 1 år har vi: % i forstader: $\frac{8}{10} \cdot a + \frac{1}{10} \cdot b = \frac{8}{10} \cdot 0,6 + \frac{1}{10} \cdot 0,4 = 0,52$ Til
% i byen: $\frac{2}{10} \cdot a + \frac{9}{10} \cdot b = \frac{2}{10} \cdot 0,6 + \frac{9}{10} \cdot 0,4 = 0,48$ = $\underline{x}_1$, ny tilstandsvektor. Til

Satt: $P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{bmatrix}$ overgangsmatrise

$P \underline{x}_0 = \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 0,52 \\ 0,48 \end{bmatrix}$ den nye sannsynlighet for å være i tilstand "bo i forstader"
—————"bo i byen"

Viktig: Enhver kolonne i P er en stokastisk vektor.

Def: (1) En vektor $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ er en stokastisk vektor (sannsynlighetsvektor) dersom:

(a) $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

(b) $\sum_{j=1}^n x_j = 1$.

(2) En $n \times n$ matrise P er en stokastisk matrise dersom enhver kolonne er en stokastisk vektor.

Def En Markov kjede består av:

(a) En følge $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ av stokastiske vektorer i $\mathbb{R}^n$, for n naturlig tall,

(b) En (overgangs) matrise P som er en $n \times n$ stokastisk matrise s.a.

$\underline{x}_{k+1} = P \underline{x}_k$ for alle $k = 0, 1, 2, \dots$

Særlig, i en Markov kjede er $\underline{x}_1 = P \underline{x}_0, \underline{x}_2 = P \underline{x}_1 = P^2 \underline{x}_0, \dots, \underline{x}_k = P^k \underline{x}_0, k \geq 1$.



22/09/2026

Tolkning: $\underline{X}_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ \boxed{x_j(0)} \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$ $1, \dots, n \rightarrow$ tilstander
 tall $\in [0, 1]$
 sannsynligheten for å være i
 tilstand j ved trinn 0. (Tilsvarende $k=1, 2, \dots$)

Hva kan vi si om Markovkjeder? De har et likevektstilstand.

Eks: $P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$, $\underline{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

$$\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.52 \\ 0.48 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}_2 = P \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.464 \\ 0.536 \end{bmatrix} \dots \dots \underline{X}_{20} \approx \begin{bmatrix} 0.333 \\ 0.666 \end{bmatrix} \text{ of}$$

$$\underline{X}_{21} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.333 \\ 0.666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot 0.333 + 0.2 \cdot 0.666 \\ 0.2 \cdot 0.333 + 0.9 \cdot 0.666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.333 \\ 0.666 \end{bmatrix} \rightarrow \text{likevektstilstand.}$$

Har funnet: $\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} 0.333 \\ 0.666 \end{bmatrix}$ s.a. $P \underline{\Delta} = \underline{\Delta}$. $\rightarrow$ 1 egenverdi til P
 $\searrow$ $\underline{\Delta}$ egenvektor hørende til $\lambda=1$

Generelt, gjelder det

Teorem 1: En stokastisk matrise P har egenverdien 1.

Bevis: $n=2$ $P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $a_{11} + a_{21} = 1 = a_{12} + a_{22}$

$$P^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$P^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{21} \\ a_{12} + a_{22} \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Samme teknikk for $n > 2$.

egenverdi til P^T .

$\downarrow$
 $\lambda=1$
 egenverdi til P .