

24/08/2026

Kap. 4

A er en $m \times n$. Har innført:

$\text{Nul}(A) = \{ \underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^n, A\underline{x} = \underline{0} \}$; er et underrom av $\mathbb{R}^n$;

$\text{Col}(A) = \text{Span}\{ \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \}$, $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er kolonnene til A .

$\hookrightarrow$ et underrom av $\mathbb{R}^m$.

Merk: $\text{Col}(A) = \{ \underline{b} \mid \underline{b} \in \mathbb{R}^m \text{ og } \underline{b} = A\underline{x} \text{ for et } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \}$.

Fra A får vi den lineære transformasjonen

$$T_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad T_A(\underline{x}) = A\underline{x}, \quad \text{for } \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Definerer: $\ker(T_A) = \{ \underline{x} \mid T_A(\underline{x}) = \underline{0}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \}$ $\xrightarrow{\text{matrise produkt}}$ kjernen til T_A (kernel).

av "range" $\text{Ran}(T_A) = \{ \underline{b} \mid \underline{b} \in \mathbb{R}^m, \underline{b} = T_A(\underline{x}), \text{ for et } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \} \rightarrow$ rekkeviden, eller bildet, til T_A .

T_A er lineær: $T_A(\underline{x} + \underline{y}) = T_A(\underline{x}) + T_A(\underline{y})$,

$$T_A(c\underline{x}) = A(c\underline{x}) = c \cdot A\underline{x} = cT_A(\underline{x}), \quad \text{for } \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}.$$

Generelt:

En lineær transformasjon mellom vektorrom V og W er tilordning

T s.a. til ethvert $\underline{v} \in V$ finnes et element i W , betegnet $T(\underline{v})$, med

egenskapene: $T(\underline{v} + \underline{x}) = T(\underline{v}) + T(\underline{x}), \quad \underline{v}, \underline{x} \in V$

og $T(c\underline{v}) = cT(\underline{v}), \quad c \in \mathbb{R}.$

Eksempel ① $\mathbb{D} = [a, b]$, for eksempel $[0, 1]$, $[0, 2\pi]$.

$V = \{f \mid f \in \mathcal{F}(\mathbb{D}, \mathbb{R}), f \text{ deriverbar og } f' \text{ kontinuert}\}$.

$W = \{f \mid f \in \mathcal{F}(\mathbb{D}, \mathbb{R}), f \text{ kontinuert}\}$.

• V, W er vektorrom. (kalkulus)

Definer $D: V \rightarrow W$, $D(f) = f'$ for $f \in V$.

$(f+g)' = f' + g'$ sier, at $D(f+g) = D(f) + D(g)$

$(cf)' = cf'$, $c \in \mathbb{R}$, så $D(cf) = cD(f)$.

D : lineær transformasjon.

Vi kan definere $\ker(T) = \{v \mid v \in V, T(v) = 0\}$ for T lineær.

Her: $\ker(D) = \{f \mid D(f) = 0\}$, mengden av alle konstante funksjoner.

Exs 2 Løs $f'' + a^2 f = 0$ (fra kalkulus)

$T(f) = f'' + a^2 f$, $f \in V$ (passende V); Løsningene er $\ker(T)$.

Lineært uavhengige mengder og basiser

Har sett i MAT 1110: standard basisen

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbb{R}^n.$$

Def: En mengde $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$ i et vektorrom V , hvor p er et naturlig tall ≥ 1 , kalles lineært uavhengig (l.u.), se "linearly independent", s\u00f8fremt

$$(*) \quad c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_p \underline{v}_p = \underline{0}$$

gjelder bare n\u00e5r $c_1 = \dots = c_p = 0$ i $\mathbb{R}$.

I motsatt fall, om $(*)$ gjelder med minst et av c_j 'ene $\neq 0$, kalles $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$ lineært avhengig (l.a.), se "linearly dependent".

Eksempler: (i) $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ er l.u. i $\mathbb{R}^n$ (se den inverse matrise teoremet)

(ii) Hvis $\underline{v} \neq \underline{0}$ i V er $\{\underline{v}\}$ l.u. ($c\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow c = 0$).

(ii) Hvis $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ i V og det fins $c \neq 0$ s.a. $\underline{v}_1 = c\underline{v}_2 \Rightarrow \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ l.a.

(iii) Hvis $\underline{0}$ er med i $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$, er mengden l.a. siden vi har

$$\underset{\neq 0}{1} \cdot \underline{0} \neq 0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_p = \underline{0}$$

(iv) $V = \mathbb{P}_2$ $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$, $p_3(t) = 2 - 3t$.

Ser, at $p_3 = 2p_1 - 3p_2$, s\u00e5 $1 \cdot p_3 - 2p_1 + 3p_2 = 0$.

$\Rightarrow \{p_1, p_2, p_3\}$ l.a.

$$c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 3.$$

Def: Gitt, et underr\u00f8m H av V og B delmengde av H ,

B er en basis for H hvis:

(a) $H = \text{Span}(B)$.

(b) B er lineært uavh.

Oftest: $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_p\}$, endelig. (Men, ikke i $\mathbb{P}$!)

Eks: Hvordan avgjører basis:

(4)

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, i \mathbb{R}^3.$$

Er $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ en basis for $\mathbb{R}^3$?

Ser på matrisen $[\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \underline{v}_3] = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & -6 \end{bmatrix} = A$ og

sjekker om den er invertibel.

Finh $B = \text{rref}(A)$, den reduserte trappeform til A

Lay-Lay-Macdonald:
rref: row-reduced echelon
form
= redusert trappeform.

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \\ 7 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 4 \cdot r_1 + r_2 \\ -7 \cdot r_1 + r_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

r_1, r_2, r_3 : rad

$\Rightarrow A$ invertibel $\Rightarrow \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ basis.

3 pivot kolonner.

Eks $\{\sin t, \cos t\}$ i $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

() Er dette l. u. eller l. a.?

Anta: $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$, $c_1, c_2 = 0$.

Shal gjelde for alle verdier av t i $\mathbb{R}$.

For $t=0$ blir $(*)$ $c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0$, eller $c_2 = 0$.

(**) blir da $c_1 \sin t = 0$. Velg en verdi av t så $\sin t \neq 0$, $t = \frac{\pi}{2}$,

(*) gir $c_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \{\sin t, \cos t\}$ er l. u.

Eks: $\{\sin 2t, \sin t \cos t\}$ er l. a. da $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$.

$$\begin{matrix} 1 \cdot \sin 2t - 2 \sin t \cos t = 0 \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ c_1 \quad \quad c_2 \end{matrix}$$

Fremgangsmåte for å finne basis for $\text{Col}(A)$ (5)

Teorem: For en $m \times n$ matrise A danner pivotkolonnene en basis for $\text{Col}(A)$.

Ser på eksempel:

(a) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3×5 matrise. $\text{Col}(B) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Diagram showing the matrix B with columns labeled $\underline{b}_1$ to $\underline{b}_5$. Column 1 is circled in green and labeled "pivot". Column 3 is circled in green. Columns 2, 4, and 5 are circled in blue and labeled "free variables". A blue arrow points from the text "free variables $\rightarrow$ inngår i finne basis for $\text{Nul}(A)$ " to the blue circles.

Ser: $\underline{b}_2 = -2\underline{b}_1$, $\underline{b}_4 = -\underline{b}_1 + 2\underline{b}_3$, $\underline{b}_5 = 3\underline{b}_1 - 2\underline{b}_3$.

Fakta: $\text{Span}\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5\} = \text{Span}\{\underline{b}_1, \underline{b}_3\}$.
 $\left. \begin{array}{l} \text{Men } \{\underline{b}_1, \underline{b}_3\} \text{ er l. u.} \\ \{\underline{b}_1, \underline{b}_3\} \text{ er} \end{array} \right\} \text{ en basis for } \text{Col}(B)$

Merk: B er på redusert trappeform!

(b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$. Finn en basis for $\text{Col}(A)$.

$\underline{a}_2 = -2\underline{a}_1$, $\underline{a}_4 = -\underline{a}_1 + 2\underline{a}_3$
 (#) $\underline{a}_5 = 3\underline{a}_1 - 2\underline{a}_3$.

$\text{Col}(A) = \text{Span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$.

Fra forrige forelesning, vet vi, at B i (a) er den reduserte trappeform til A , altså $B = \text{rref}(A)$.

Løsninger til $A\underline{x} = \underline{0}$ er de samme som løsningene til $B\underline{x} = \underline{0}$.
 $\underbrace{\underline{x} \in \mathbb{R}^3}$

Speniell: lineært avh. blandt kolonner i A er det samme som for B .

Se (#). Speniell er $\{\underline{a}_1, \underline{a}_3\}$ l. u. (siden $\{\underline{b}_1, \underline{b}_3\}$ er l. u.)

$\Rightarrow \{\underline{a}_1, \underline{a}_3\}$ er en basis for $\text{Col}(A)$.

Teorem Hvis $H = \text{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$ er et underrom av V ,
 og et av vektorene i H , f.eks. $\underline{v}_1$, er en lineær kombinasjon
 av de resterende, så

$$H = \text{Span}\{\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p\}.$$

Forutsatt at $H \neq \{0\}$, så inneholder $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$ en basis for H .

Eks: $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -5 \end{bmatrix}$.

$$H = \text{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}. \quad \text{Ser } \underline{v}_3 = 5\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2.$$

Teoremet $\Rightarrow H = \text{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. (Ved å fjerne $\underline{v}_3$ fra $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.)

Er $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ multiplum av hverandre? Nei

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ l. u. $\Rightarrow \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ basis for H .

Eks: $\mathbb{P}_n$, $n \geq 1$

$B = \{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ basis for $\mathbb{P}_n$.

polynomiet $p(t) = 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$. (Kalkulus og algebras
 fundamentale setning)