

25/08/2026
①

Arvshitt 4.3 - 4.4

Koordinatsystemer: oppstår ved valg av en basis.

Teorem Gitt $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$, en basis for et vektorrom V ,
det fins, for hvert $\underline{x} \in V$, unike skalarer $c_1, \dots, c_n$ s.a.

$$(*) \quad \underline{x} = c_1 \underline{b}_1 + \dots + c_n \underline{b}_n.$$

Sett $[\underline{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$: kalles koordinatvektoren til $\underline{x}$ i B .

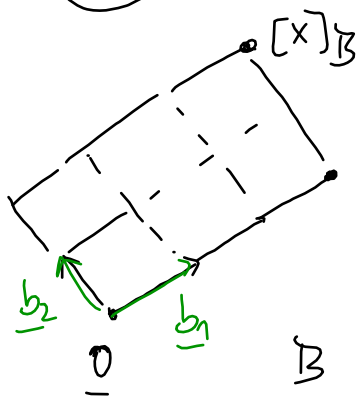
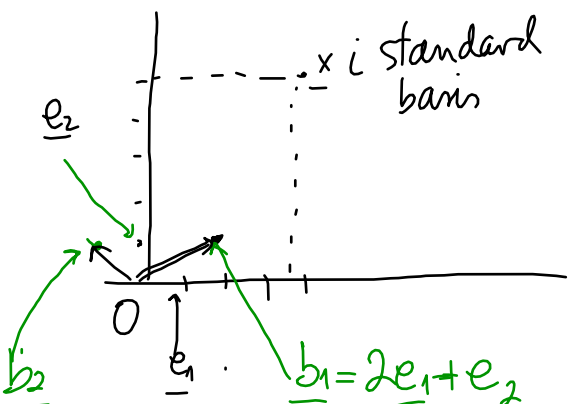
Til $\underline{x} \in V \xrightarrow{\text{tilordner}} [\underline{x}]_B \in \mathbb{R}^n \rightarrow$ koordinatavbildning.

Eksempel: $V = \mathbb{R}^2$; $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ standard basis.

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Basis: sjekk at $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ er invertibel. (har determinant $\neq 0$).
 $\uparrow \underline{b}_1 \quad \uparrow \underline{b}_2$

Ta, f.eks., $\underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Hva er $[\underline{x}]_B$? Løser $\underline{x} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; finner c_1, c_2 .

$$\Leftrightarrow \text{Løs } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}; \text{ Radredusere } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{(-\frac{1}{3})r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ løsning. Set } [\underline{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



Fra $\underline{x} \in V$ til $[\underline{x}]_B$: Løser ligning $[\underline{b}_1 \ \underline{b}_2] \underline{c} = \underline{x}$.

Omvent: f.eks.

gitt $[\underline{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, hva er $\underline{x}$?

Regn ut:

$$\underline{x} = 2\underline{b}_1 - 3\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

25/08/2026
②

Gitt $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ basis i $\mathbb{R}^n$,

$n \times n$ matrisen $P_B = [\underline{b}_1 \dots \underline{b}_n]$ er koordinatshiftematrisen
fra basis B til standard basis

(*) $\underline{x} = c_1 \underline{b}_1 + \dots + c_n \underline{b}_n$ løses som:

(**) $P_B [\underline{x}]_B = \underline{x}$, $[\underline{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.
↑ i standard basis $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$

MAT1110: Da B er en basis, blir P_B invertibel og $[\underline{x}]_B = P_B^{-1} [\underline{x}]$.

Teorem (generelt)

Gitt $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$, en basis for vektorrom V ,

Koordineringen $x \in V \rightsquigarrow [\underline{x}]_B \in \mathbb{R}^n$

er en lineær, 1-til-1 og p^0 (bijektiv) transformasjon.
(injektiv) (surjektiv)

Kan bevises:

Nyttig konsekvens: for $c_1, \dots, c_p$ skalarer og $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \in V$, har

$$[c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_p \underline{v}_p]_B = c_1 [\underline{v}_1]_B + \dots + c_p [\underline{v}_p]_B.$$

Eksempel: $V = \mathbb{P}_2$; $B = \{1, t, t^2\}$ standard basis for $\mathbb{P}_2$.
er i $\mathbb{R}^n$

Koordinatavbildningen: $p \longrightarrow [p]_B \in \mathbb{R}^3$

For $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, er $[p]_B = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Bruk koordinatavbildningene til å vise, at

$$S = \{1+2t^2, 4+t+5t^2, 3+2t\} \text{ er l. a. i } \mathbb{P}_2.$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{array}$$

$$B = \{1, t, t^2\}.$$

Setter opp: $[g_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, [g_2]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, [g_3]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Siden $g \rightarrow [g]_B$ er lineær og bijektiv, har vi:

$$\{g_1, g_2, g_3\} \text{ (l.a.) i } V \iff \{[g_1]_B, [g_2]_B, [g_3]_B\} \text{ er l.a. i } \mathbb{R}^3$$

$\underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \quad \underline{u}_3$

⚡
Kan sjekkes ved rad reduksjon

l.a. i $\mathbb{R}^3$ er sikret ved en ikke-triviell løsning til: $\begin{bmatrix} [g_1]_B & [g_2]_B & [g_3]_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{0}.$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot 3r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-4)r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - 5x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Velg, f.eks., } x_3 = 1. \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ bestemmer en l.a. blandt } \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3.$$

$$\Rightarrow 5\underline{u}_1 - 2\underline{u}_2 + \underline{u}_3 = \underline{0} \text{ (se ⚡)}. \text{ Derfor er } \underline{5g_1 - 2g_2 + g_3 = 0 \text{ i } \mathbb{P}_2}.$$

Dimensjonen til et vektorrom

(4)

Kjent: $\mathbb{R} \rightarrow \dim = 1$
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \dim = 2$
 $\vdots$
 $\mathbb{R}^n \rightarrow \dim = n.$

Hva med dim av andre V ? Av underrom?

Nøkkelforultat i $\mathbb{R}^n$ (MAT 1110): p vektorer i $\mathbb{R}^n$, hvor $p > n$,
er lin. avh.

$\overset{p \text{ kolonner}}{\text{rad}^n \begin{bmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \end{bmatrix}} \quad p > n \Rightarrow \text{kolonnene er l. a.}$

Generelt:

Teorem 10 Hvis et vektorrom V har en basis $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$,
så vil enhver delmengde av V med p elementer, $p > n$, være lin. avh.
(l. a.)

(Bruk koordinatavbildningen)

Konsklusjon (Teorem 11) Hvis V har en basis med n elementer, så vil
enhver annen basis for V ha n elementer.

Vi definerer: for V vektorrom:

• hvis det finnes $S \subseteq V$ delmengde som er endelig og utspenner V , kalles
 V endelig dimensjonalt (endelig dim.);

$\dim V = \text{antallet av elementer i en basis.}$

• $\dim\{0\} = 0$

• Hvis ingen endelig S utspenner V kalles V uendelig dim.

Eksempler • $\dim \mathbb{R}^n = n, n \geq 1.$

• $\dim \mathbb{P}_n = n+1, B = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ (standard) basis.

• $\mathbb{P}$ er uendelig dim.

Eks.

Dimensjon av underrom

Finn $\dim H$, hvor $H = \left\{ \begin{bmatrix} a-3b+6c \\ 5a+4d \\ b-2c-d \\ 5d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$

Finn S som utspenner H :

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} a \\ 5a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6c \\ 0 \\ -2c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4d \\ -d \\ 5d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\underline{v}_1 \quad \quad \underline{v}_2 \quad \quad \underline{v}_3 \quad \quad \underline{v}_4$

$$\Rightarrow H = \text{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$$

Gjelder

Ser etter l.a. blant $\underline{v}_j$ 'ene: $\underline{v}_3 = -2\underline{v}_2 \Rightarrow H = \text{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4\}$

Ser: • $\underline{v}_2$ ikke-multiplum av $\underline{v}_1$

• $\underline{v}_4$ ikke lineær komb. av $\underline{v}_1, \underline{v}_2$. $\left(\Leftrightarrow [\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \underline{v}_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$
har kun løsning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$$\Rightarrow \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4\} \text{ l.u.} \Rightarrow \text{basis for } H$$

$$\Rightarrow \dim H = 3$$

Merk: $\dim H \leq \dim \mathbb{R}^4$

Generelt

Teorem 12 Endelig dim., H underrom. Det gjelder:

(a) Hvis $S \subseteq H$ er l.u. kan S utvides til en basis for H .

(b) H er endelig dim. $\Leftrightarrow \dim H \leq \dim V$.

Dimensjon av underrom fra en $m \times n$ matrise ⑥

$A: m \times n$ matrise $\rightarrow \text{Nul } A = \text{underrommet av } \mathbb{R}^n = \{ \underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^n, A\underline{x} = \underline{0} \}$

$\rightarrow \text{Col } A = \text{Span}\{ \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \}$, underrom av $\mathbb{R}^m$.

$\rightarrow \text{Rad } A = \text{Span}\{ \underline{r}_1, \dots, \underline{r}_m \}$ — u — av $\mathbb{R}^m$.
(Row A : [LLM]) $\nwarrow \nearrow$ radene til A

Setter: nullitet(A) := $\dim(\text{Nul } A)$

Definisjon rang(A) := $\dim(\text{Col } A)$.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \underline{r}_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 & \underline{a}_4 & \underline{a}_5 \end{matrix}$$

reduerte trappform (rref)

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & \boxed{0} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \underline{s}_1 \\ \underline{s}_2 \\ \underline{s}_3 \end{matrix}$$

$\underline{b}_1$ $\underline{b}_2$ $\underline{b}_3$ $\underline{b}_4$ $\underline{b}_5$

$\uparrow$ pivot $\uparrow$ svarer til de frie variabler

Rangteoremet A $m \times n$ matrise

$$\text{rang}(A) + \text{nullitet}(A) = n.$$

Har: $\text{Rad}(A) = \text{Rad}(B)$.

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Rad}(A))$$

$\{ \underline{s}_1, \underline{s}_2 \}$ l.h. $\Rightarrow$ basis for $\text{Rad}(B)$

$$B\underline{x} = \underline{0}, \underline{x} \in \mathbb{R}^5$$

$\Uparrow$ samme løsningsrom

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

Har sett: $\text{Nul}(A) = \text{Span}\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \}$

= antallet av frie variabler = 3.

$$\Rightarrow \text{Nullitet}(A) = 3$$

Som basis for $\text{Col}(A)$ tar vi $\{ \underline{a}_1, \underline{a}_2 \}$, svarende til pivotkolonner (bruk B).

$$\text{rang}(A) = 2.$$

$$2 + 3 = 5 = n$$