

28/09/2026

(7)

## MAT 1120 Avsnitt 5.9

## Lineær algebra anvendt på Markovkjeder

Minner om oppsett: Folge  $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$  i  $\mathbb{R}^n$  hvor

- Markov kjede
- $\underline{x}_k$  er en stokastisk vektor (sannsynlighetsvektor): inngangene i  $\underline{x}_k$  er  $\geq 0$  og summerer til 1 for hvert  $k=0,1,2,\dots$
  - $\underline{x}_{k+1} = P \cdot \underline{x}_k$ , hvor  $P$  er en  $n \times n$  stokastisk matrise.  
 ↑ matrise multiplikasjon

Ser etter en likevektsstilstand: vektor  $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$  s.a.  $P\underline{u} = \underline{u}$  og  $\underline{u}$  er stokastisk.  
 (b) (a) Enhver kolonne er en stokastisk vektor.

Eksempel:  $P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{bmatrix}$ . For eksempel, la  $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$ , og vi danner Markovkjeden  $\{\underline{x}_k\}_k$   
 $\underline{x}_{k+1} = P \underline{x}_k, k=0,1,2,\dots$   
 $\uparrow \underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{bmatrix}$

Teorem 10: En stokastisk matrise  $P$  har alltid egenverdien 1.

$$\Leftrightarrow \underline{x}_{k+1} = P^{k+1} \underline{x}_0, k=0,1,2,\dots$$

Spesielt eksisterer det alltid en likevektsstilstand  $\underline{u}$ .

Spørsmål: (1) Hva er en god metode til å finne en slik  $\underline{u}$ ?

(2) Under hvilke betingelser er  $\underline{u}$  unik?

(3) Hva er meningen med "likevekt"?

For (1), ser på eksempel for å illustrere metoden.

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{bmatrix}, \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}, \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix} \underline{x}_0, \dots, \underline{x}_{20} \approx \begin{bmatrix} 0,333 \\ 0,666 \end{bmatrix} = \underline{v}$$

$P\underline{v} = \underline{v}$ . Se  $\underline{x}_{20}$ : approksimasjon til likevektsstilstand.

Fra teorien for egenvektorer, en egenvektor til  $P$  hørende til  $\lambda=1$  finnes ved:

$$[(P-I):0] \xrightarrow[\text{redusert trappform}]{\text{Finnes rref}} \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & -0,1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[10 \cdot r_2]{10 \cdot r_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Egenvektorer: } \begin{bmatrix} 1/2 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_2 \neq 0. \text{ Velger } x_2 = 2 \Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{pivot} & \text{fri variabel} \\ 2x_1 - x_2 = 0, & x_2 \text{ fri variabel.} \end{matrix}$$

Se  $P\underline{v} = \underline{v}$ . Men,  $\underline{v}$  ikke stokastisk.

For å få stokastisk: la  $w = v_1 + v_2 = 3$ , sett  $\underline{u} = \frac{1}{w} \underline{v} \Rightarrow \underline{u} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \leftarrow \underline{\text{Likevektsstilstand.}}$

Med  $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underline{x}_{20} \approx \underline{u}$ . Dette sier, at Markovkjeden tilnærmer likevektsstilstanden.  
 Hva om vi starter med en annen  $\underline{x}_0$ ? (med  $k=20$ )  $\underline{u}$

28/09/2026  
⑦

## Def (Regulær matrise)

En  $n \times n$  matrise  $A$  er regulær dersom det finnes et positiv heltall  $k$  s.a.  $A^k$  har bare strengt positive innganger.

Eksempler:  $P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{bmatrix}$ ,  $k=1$ .

$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $k=1$ .

$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ .

↑ Må sjekke potenser.

$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ .  $A$  regulær  $k=2$ .

Hva med  $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ?

$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$ . Det gjelder, at  $P^2 > 0$  ( $P^2$  har strengt positive innganger)  $\Rightarrow P$  regulær.

Generelt, har vi angående Markov kjeder:

Teorem 11: Gitt  $P$ ,  $n \times n$  regulær stokastisk matrise, det finnes en entydig likevektsvektor  $\underline{s}$ , nemlig en egenvektor hørende til egenverdien  $\lambda=1$  slik at  $\underline{s}$  er en stokastisk vektor.

Envidere, for vilkårlig valg av  $\underline{x}_0$  i  $\mathbb{R}^n$  vil Markovkjeden  $\{\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots\}$  konvergere mot  $\underline{s}$ . Med andre ord,  $P^k \underline{x}_0 \rightarrow \underline{s}$  når  $k \rightarrow \infty$ .

Markovkjede:

$k=0$   $k=1$

$\underline{x}_0$   $\underline{x}_1$

$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_j(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} x_1(1) \\ \vdots \\ x_j(1) \\ \vdots \\ x_n(1) \end{bmatrix}$

→

tilsvarende

sannsynligheten ved at systemet er i tilstand  $j$  ved trinn  $k=0$

$P = [P_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$

$P_{ij}$  = overgangssannsynligheten for at systemet går i tilstand "j" fra "i"

etter ett trinn. (fra  $k=0$  til  $k=1$ , fra  $k=1$  til  $k=2, \dots$ )

Eks:  $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$ .  $P$  regulær  $\Rightarrow$  1 entydig likevektstilstand.  
(Eks 3 i 5.9)

$$[(P-I) \ 0] \sim \begin{bmatrix} -0,5 & 0,2 & 0,3 & | & 0 \\ 0,3 & -0,2 & 0,3 & | & 0 \\ 0,2 & 0 & -0,6 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & | & 0 \\ 3 & -2 & 3 & | & 0 \\ 2 & 0 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{x_1 - 3x_3 = 0} \\ \xrightarrow{x_2 - 6x_3 = 0} \\ \uparrow x_3 = \text{fri} \end{matrix} \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 6x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \neq 0$$

La  $\underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $P\underline{v} = \underline{v}$ . Gjør om til stokastisk:  $w = 10$   
vektoren  $\underline{v}$

$$\Rightarrow \underline{1} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$$

Eks 2 i avsn. 5.9  $P = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}$

$$[(P-I) \ 0] = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,3 & | & 0 \\ 0,2 & -0,2 & 0,3 & | & 0 \\ 0,1 & 0,1 & -0,6 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & | & 0 \\ 2 & -2 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -15/4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow x_3$  fri

Velg  $x_3 = 4 \Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix}$ , hvor  $P\underline{v} = \underline{v}$ .

Gjør  $\underline{v}$  om til stokastisk:  $w = 9 + 15 + 4 = 28 \Rightarrow$

$$\underline{1} = \begin{bmatrix} 9/28 \\ 15/28 \\ 4/28 \end{bmatrix} \text{ entydig likevekt.}$$

# Avsnitt 6.1 Indreproduktrom.

26/09/2029  
(4)

Starter med kjente begreper fra geometri i  $\mathbb{R}^2$  og  $\mathbb{R}^3$ .

Ek.:  $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Priskprodukt:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 7 = -7 \in \mathbb{R}$ .

Definisjon: Gitt  $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ ,

deres indreprodukt, eller priskprodukt  $\underline{u} \cdot \underline{v}$ , defineres ved:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Tilordning  
 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(\underline{u}, \underline{v}) \rightsquigarrow \underline{u} \cdot \underline{v}$

Har en tolkning som produkt av matriser:

$\underline{u} : n \times 1$  kolonne,  $\underline{v} : n \times 1$  kolonne

$\underline{u}^T = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$   $1 \times n$  matrise

(Ofte på formen  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , radform) og begreper

$\underline{u}^T \cdot \underline{v} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$   
matrise produkt  $1 \times 1$  matrise

Målet: overføre geometrisk forståelse fra  $\mathbb{R}^2$  og  $\mathbb{R}^3$  til  $\mathbb{R}^n$  (senere til et abstrakt vektorrom  $V$ ).  
Først:  $\underline{v} \cdot \underline{u} = \underline{v}^T \cdot \underline{u} = [0 \ -3 \ 7] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 7 \cdot (-1) = -7 = \underline{u} \cdot \underline{v}$  (er kommutativ)

Teorem 1 For alle  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$  og skalarer  $c$ , gjelder det:

(1)  $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$ .

(2)  $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$ .

(3)  $(c\underline{u}) \cdot \underline{v} = c(\underline{u} \cdot \underline{v})$ .

(4)  $\underline{u} \cdot \underline{u} \geq 0$  og  $\underline{u} \cdot \underline{u} = 0 \iff \underline{u} = \underline{0}$ .

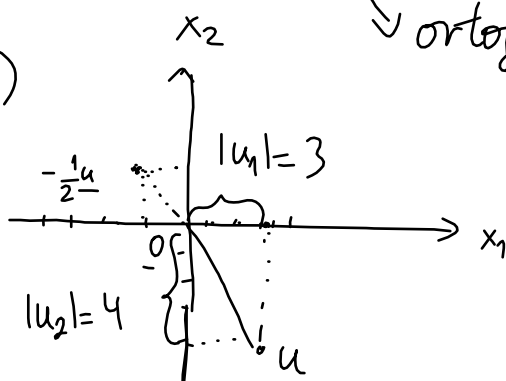
( $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 0 \iff u_1^2 = \dots = u_n^2 = 0 \iff u_1 = \dots = u_n = 0 \iff \underline{u} = \underline{0}$ .)

Har (5):  $(c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 + \dots + c_p \underline{u}_p) \cdot \underline{w} = c_1 \underline{u}_1 \cdot \underline{w} + \dots + c_p \underline{u}_p \cdot \underline{w}$ .

Begreper som overføres til  $\mathbb{R}^n$

lengde  
avstand  
ortogonalitet

Lengde:  $\underline{u} = (3, -4)$



Lengden til  $\underline{u}$ :  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .

$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$

Def: Lengden, eller normen til  $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$  er gitt ved  $\sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$ . Notasjon:  $\|\underline{u}\|$ .

Eksempel:  $\|(-\frac{1}{2}) \cdot \underline{u}\| = \frac{1}{2} \|\underline{u}\| = |-\frac{1}{2}| \cdot \|\underline{u}\|$ ,  $(-\frac{1}{2}) \cdot \underline{u} = (-\frac{3}{2}, 2)$

Generelt, er  $\|c\underline{u}\| = |c| \cdot \|\underline{u}\|$ , for alle  $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ , alle  $c$  skalarer. 28/09/2026  
Særlig klasse: enhetsvektorer (5)

$\underline{u} \in \mathbb{R}^n$  med  $\|\underline{u}\| = 1$ .

Ex:  $\underline{u} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .  $\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$ .

Mer:  $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\|\underline{v}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$  og  $\underline{u} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v}$ .

Generelt: til  $\underline{v} \neq \underline{0}$  i  $\mathbb{R}^n$  tilordnes dens normalisering:  $\underline{u}$  er normaliseringen af  $\underline{v}$ .

$$\underline{u} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v} \text{ og } \|\underline{u}\| = 1. \quad (\underline{v} \neq \underline{0} \Leftrightarrow \underline{v} \cdot \underline{v} \neq 0 \Leftrightarrow \|\underline{v}\| \neq 0)$$