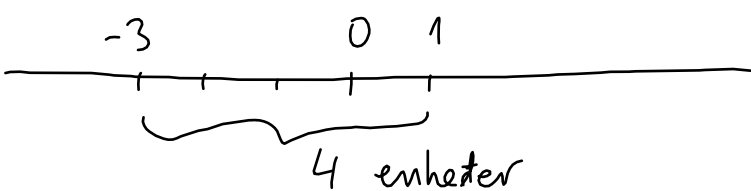
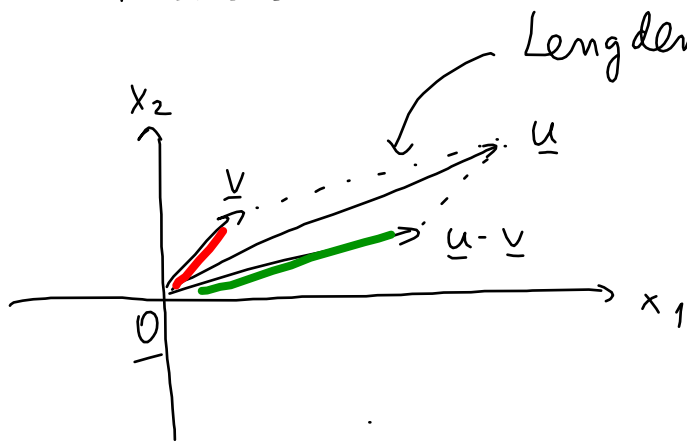


Avsnitt 6.1 IndreproduktromMinner: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ Definerer $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n \cdot v_n \in \mathbb{R}$.Viktig: For $\underline{w}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \in \mathbb{R}^n$ og skalarer $c_1, \dots, c_p$:

$$\underline{w} \cdot (c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_p \underline{v}_p) = c_1 (\underline{w} \cdot \underline{v}_1) + \dots + c_p (\underline{w} \cdot \underline{v}_p).$$

Definerte også: $\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$. Her $\|\underline{u}\|$ er lengden, eller normen, til $\underline{u}$.Def: Avstanden mellom to vektorer, $\underline{u}$ og $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, er lengden av $\underline{u} - \underline{v}$.Kommentarer: (1) $\|\underline{u} - \underline{v}\| = \|-(\underline{v} - \underline{u})\| = \|(-1) \cdot (\underline{v} - \underline{u})\| = |-1| \cdot \|\underline{v} - \underline{u}\| = \|\underline{v} - \underline{u}\|$.(2) For $n=1$, dette er kjent. For eks. $u = -3, v = 1$ 

$$\|\underline{u} - \underline{v}\| = |u - v| = |(-3) - 1| = |1 - (-3)| = 4.$$

(3) For $n=2$:Lengden av $\underline{u} - \underline{v}$ = avstanden fra $\underline{v}$ til $\underline{u}$.

$$\text{Notasjon: } d(\underline{u}, \underline{v}) = \|\underline{u} - \underline{v}\|$$

↑
"distance"

$$\text{Merk: } \underline{v} + (\underline{u} - \underline{v}) = \underline{u}$$

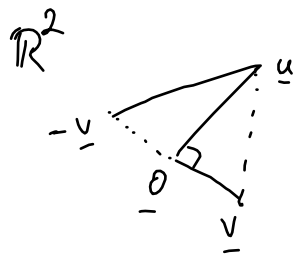
(parallelogramregel)

Så (2) og (3) motiverer definisjonen i $\mathbb{R}^n$: $d(\underline{u}, \underline{v}) = \|\underline{u} - \underline{v}\|, \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{Spesielt: } d(\underline{u}, \underline{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}.$$

OrtogonalitetMotivasjon: i $\mathbb{R}^2$ er $\underline{u}$ og $\underline{v}$ ortogonale dersom vinkelen mellom $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er 90° .

Ønsker nå: formulere dette som egenskap ved hjelp av indreprodukt.

Dersom $\underline{u}, \underline{v}$ ortogonale, da har $\underline{u} - \underline{v}$ og $\underline{u} - (-\underline{v})$ samme lengde (avstanden fra $\underline{u}$ til $\underline{v}$ er lik den fra $\underline{u}$ til $-\underline{v}$)

$$\Rightarrow \|\underline{u} - \underline{v}\| = \|\underline{u} + \underline{v}\|.$$

Spesielt er $\|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = \|\underline{u} + \underline{v}\|^2$.

$$\begin{aligned} (\underline{u} - \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) &= \underline{u} \cdot \underline{u} - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v} \\ &= (\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{u} + \underline{v} \cdot \underline{v} \\ &= \underline{u} \cdot \underline{u} + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v} \end{aligned}$$

Bruk regler for prikkprodukt

Likhet gjelder nettopp når $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.Bruker nå dette som definisjon i $\mathbb{R}^n$.

Def: To vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er ortogonale dersom $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$. Skriver $\underline{u} \perp \underline{v}$. ($\perp$: perp-tegn!) 29/09/2026 (1)

Teorem 2: To vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er ortogonale hvis og bare hvis $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$.

Bewis: Se forrige utregning.

Orthogonal complement

$\mathbb{R}^3$  L: linje i retning av $\underline{v}$
W underrom av $\mathbb{R}^3$
Her: $\underline{v} \perp \underline{w}$, alle $\underline{w} \in W$.

Def: $W \subseteq \mathbb{R}^n$ Orthogonal komplementet til W er mengden av alle $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $\underline{u} \perp \underline{w}$ for enhver $\underline{w} \in W$.

Notasjon: $W^\perp$. Har $W^\perp = \{ \underline{u} \mid \underline{u} \in \mathbb{R}^n \text{ og } \underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \text{ for alle } \underline{w} \in W \}$

Hvordan kan vi beskrive $W^\perp$?

Gitt $W = \text{span}\{ \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p \} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Antar at $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ er slik at $\underline{u} \cdot \underline{w}_i \stackrel{(1)}{=} 0$, for $i = 1, \dots, p$.

Viser: $\underline{u} \in W^\perp$.

La $\underline{w} \in W$. Skriv $\underline{w} = c_1 \underline{w}_1 + \dots + c_p \underline{w}_p$, $c_1, \dots, c_p$ skalærer

$$0 = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot (c_1 \underline{w}_1 + \dots + c_p \underline{w}_p) = c_1 \underbrace{\underline{u} \cdot \underline{w}_1}_{=0 \text{ fra (1)}} + \dots + c_p \underbrace{\underline{u} \cdot \underline{w}_p}_{=0 \text{ fra (1)}} = 0 \Rightarrow \underline{u} \in W^\perp$$

Oppsumert: $\underline{u} \in W^\perp$ hvis og bare hvis $\underline{u}$ er ortogonal på elementene i en generatormengde for W.

Kan vises: $W^\perp$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$ når $W \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ortogonalitet blant $\text{Nul}(A)$, $\text{Rad}(A)$, $\text{Col}(A)$

29/09/2026
③

A $m \times n$ matrise.

Skriv $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\underline{r}_1 = [a_{11} \dots a_{1n}]$ 1ste rad $\underline{r}_1 \in \mathbb{R}^n$
 $\vdots$
 $\underline{r}_m = [a_{m1} \dots a_{mn}]$ m^{te} rad $\underline{r}_m \in \mathbb{R}^n$

Gitt $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^n$, $A \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_1 \cdot \underline{x} \\ \vdots \\ \underline{r}_m \cdot \underline{x} \end{bmatrix}$

priskprodukt.

$$\underline{x} \in \text{Nul}(A) \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{r}_1 \cdot \underline{x} = \dots = \underline{r}_m \cdot \underline{x} = 0$$

Konklusjon: $\underline{x} \in \text{Nul}(A)$ hvis og bare hvis $\underline{x} \in (\text{Rad}(A))^\perp$ (*). Husk: $\text{span}\{\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_m\} = \text{Rad}(A) (= W, \text{underrom av } \mathbb{R}^n)$

Antar nu $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$ $m \times n$
 $\underline{b}_1$ $\underline{b}_n$

La $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ være kolonnene i B.

$$\text{Col}(B) = \text{span}\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}.$$

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_n^T \end{bmatrix}$$

B^T er den transponerte matrisen til B.

Teorem 3

$$(\text{Rad}(A))^\perp = \text{Nul}(A)$$

$$(\text{Col}(A))^\perp = \text{Nul}(A^T)$$

Av(x): $\text{Nul}(B^T) = (\text{Rad}(B^T))^\perp$

$$\text{Rad}(B^T) = \text{span}\{\underline{b}_1^T, \dots, \underline{b}_n^T\} = \text{Col}(B). \text{ Bruk } B=A$$

Avsnitt 6.2 Ortogonale mengder

29/09/2026
④

Def: Gitt $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \in \mathbb{R}^n$, mengden $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$ er en ortogonal mengde dersom $\underline{v}_j \cdot \underline{v}_k = 0$ for alle $j \neq k, j, k \in \{1, \dots, p\}$.

(ethvert valg av $\underline{v}_j, \underline{v}_k$ forskjellige er s.a. $\underline{v}_j \perp \underline{v}_k$.)

Eksempel ① La $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ -7/4 \end{bmatrix}$.

Regner ut: $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 0$

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_3 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = 0$$

$$\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = 0.$$

Så $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ ortogonal.

Teorem 4: Antar, at $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p\}$ er en ortogonal mengde av ikke-null vektorer. Da er S en lineært uavhengig mengde.

Spesielt, lar $W = \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$, da er $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$ en basis for W .

(Merk: det er enklere å sjekke ortogonalitet av vektorene i S enn å sjekke at S er lineært uav.)
(radreduksjon...)

Def: En ortogonal basis for et underrom W av $\mathbb{R}^n$ er en basis som er en ortogonal mengde i $\mathbb{R}^n$.

Fra eks. 1: • $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$

• $\{\underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ er en ortogonal basis for $W = \text{span}\{\underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.

• $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}, \{\underline{v}_1, \underline{v}_3\} \dots$

Teorem 5: La $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$ være en ortogonal basis for $W \subseteq \mathbb{R}^n$ underrom.

Gitt $\underline{w} \in W$, skriv på formen $\underline{w} = c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_p \underline{v}_p$, $c_1, \dots, c_p$ skalarer.

Da er $c_j = \frac{1}{\underbrace{\underline{v}_j \cdot \underline{v}_j}_{\text{prikkprodukt}}} \cdot \underbrace{\underline{w} \cdot \underline{v}_j}_{\text{prikkprodukt}}, \text{ for alle } j=1, \dots, p.$

Beris: Bruk viktig ligning, side 1. (Merk: $c_1, \dots, c_p$ bestemmes uten behov for radreduksjon av $[\underline{v}_1 \dots \underline{v}_p : \underline{w}]$.)

Eksempel 1: $S = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ -7/4 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_3} \right\}$ 29/09/2026 (6)

S ortog. basis.

Skrid $\underline{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ som lineær komb. av $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$.

Fra teorem: $\underline{w} = \underbrace{\frac{\underline{w} \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1}}_{c_1} \underline{v}_1 + \underbrace{\frac{\underline{w} \cdot \underline{v}_2}{\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2}}_{c_2} \underline{v}_2 + \underbrace{\frac{\underline{w} \cdot \underline{v}_3}{\underline{v}_3 \cdot \underline{v}_3}}_{c_3} \underline{v}_3$.

$$\underline{w} \cdot \underline{v}_1 = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 3$$

$$\underline{w} \cdot \underline{v}_2 = -2$$

$$\underline{w} \cdot \underline{v}_3 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = 2^2 + (-1)^2 + (1)^2 = 6$$

$$\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = 11$$

$$\underline{v}_3 \cdot \underline{v}_3 = \frac{33}{8}$$

$$c_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

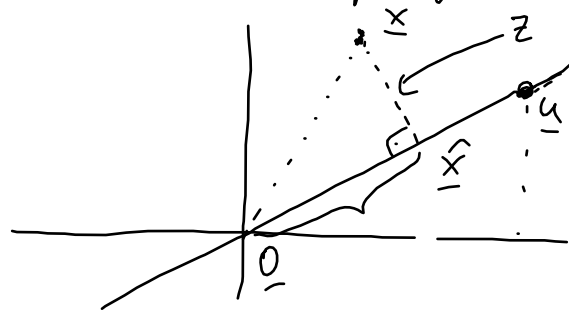
$$c_2 = \frac{-2}{11} = -\frac{2}{11}$$

$$c_3 = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{33}{8}} = \frac{2}{11}$$

$$\Rightarrow \underline{w} = \frac{1}{2} \underline{v}_1 - \frac{2}{11} \underline{v}_2 + \frac{2}{11} \underline{v}_3$$

Ortogonal projeksjon

$\mathbb{R}^2$



L linjen fra O til u . Betrakt $\hat{x}$ og z :

(#) $\hat{x} = \alpha \cdot u$, α skalar ($\hat{x}$ og u er på samme linje)

(##) $\underline{z} = x - \hat{x}$ ortogonal på u
 $= z$

Hva skal α være slik at (#) og (##) gjelder?

$$\underline{x} = \hat{x} + (x - \hat{x}) = \hat{x} + z$$

↑ ↑
Samme retning som u $z \perp u$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{x \cdot u}{u \cdot u}$$

Def: Gitt $u \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, gitt $x \in \mathbb{R}^n$, vektoren

$$\hat{x} = \frac{x \cdot u}{u \cdot u} u \text{ kalles projeksjonen av } x \text{ på } \text{Span}\{u\} = L, \text{proj}_L x$$

Merh: Sett $z = x - \hat{x}$. Da er $\boxed{z \perp u}$ og $\boxed{x = \text{proj}_L x + z}$

Ortonormal basis: $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p\}$ ortog. basis for W s.a. $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p$ er enhetsvektorer.

Eks: $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ortog.

Ortonormal: $\underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}$ $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ Ortonormal.

+