

Avsnitt 4.6 Basisskifte

31/08/2026

Ser på: V vektorrom med $\dim(V) = n$, $n \geq 1$.

Gitt B er en basis for V , tilordningen $\underline{x} \mapsto [\underline{x}]_B \in \mathbb{R}^n$ er linear.
 $\underline{x} \in V$ Relasjon?

Hvis $\mathcal{C} = \{ \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n \}$, for $\underline{x} \mapsto [\underline{x}]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^n$ er linear.

Viser: $[\underline{x}]_B$ og $[\underline{x}]_{\mathcal{C}}$ relateres ved matrise multiplikasjon

med en $n \times n$ matrise som ikke avhenger av $\underline{x}$, men bare av B og $\mathcal{C}$.

Ser på et eksempel: (Oppg. 2)

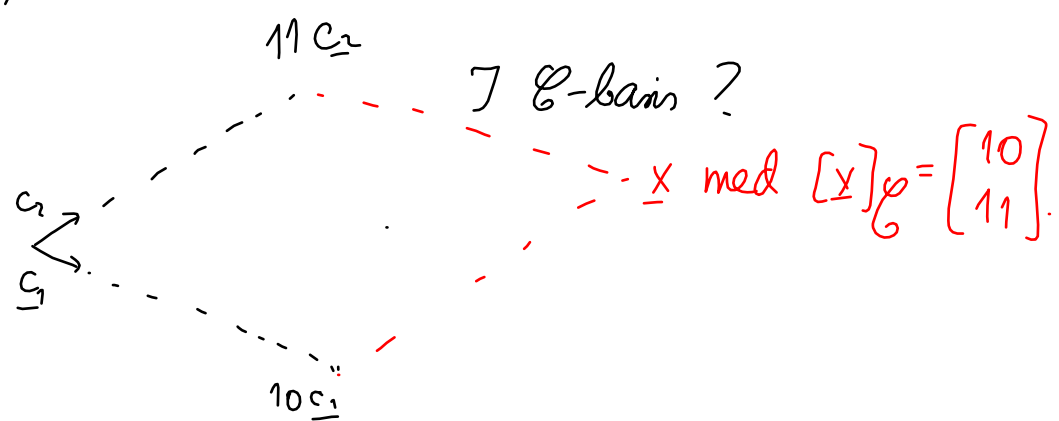
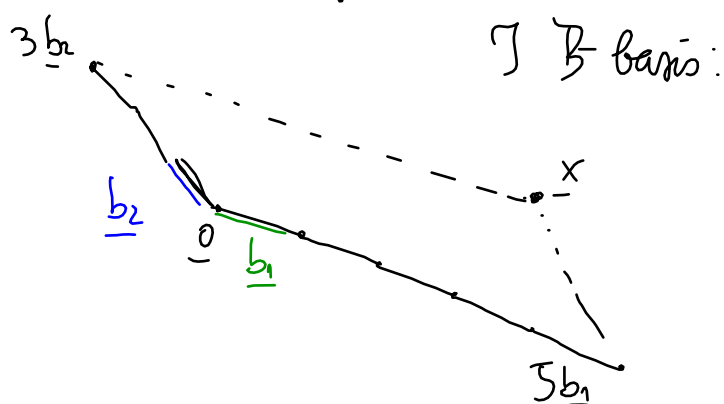
V vektorrom, med 2 basiser, $B = \{ \underline{b}_1, \underline{b}_2 \}$ og $\mathcal{C} = \{ \underline{c}_1, \underline{c}_2 \}$.

Det er gitt: $\underline{b}_1 = -\underline{c}_1 + 4\underline{c}_2$ (1)

$\underline{b}_2 = 5\underline{c}_1 - 3\underline{c}_2$ (2)

Antar $\underline{x} = 5\underline{b}_1 + 3\underline{b}_2 \in V$. Dette sier, at $[\underline{x}]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Finn $[\underline{x}]_{\mathcal{C}}$ utifra (1), (2) og (3).

Figur (til motivasjon).



Bruker: koordinatavbildningen $\underline{x} \mapsto [\underline{x}]_{\mathcal{C}}$ er linear.

$$\underline{x} = 5\underline{b}_1 + 3\underline{b}_2.$$

(2)

$$\Rightarrow [\underline{x}]_{\mathcal{C}} = [5\underline{b}_1 + 3\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} \quad (\underline{x} \text{ i } \mathcal{B}\text{-basisen})$$

$$= 5[\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} + 3[\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} \quad (\text{brukes linearitet av koord. avb.})$$

$$= 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (1) \quad \underline{b}_1 = -\underline{c}_1 + 4\underline{c}_2 \\ (2) \quad \underline{b}_2 = 5\underline{c}_1 - 3\underline{c}_2 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

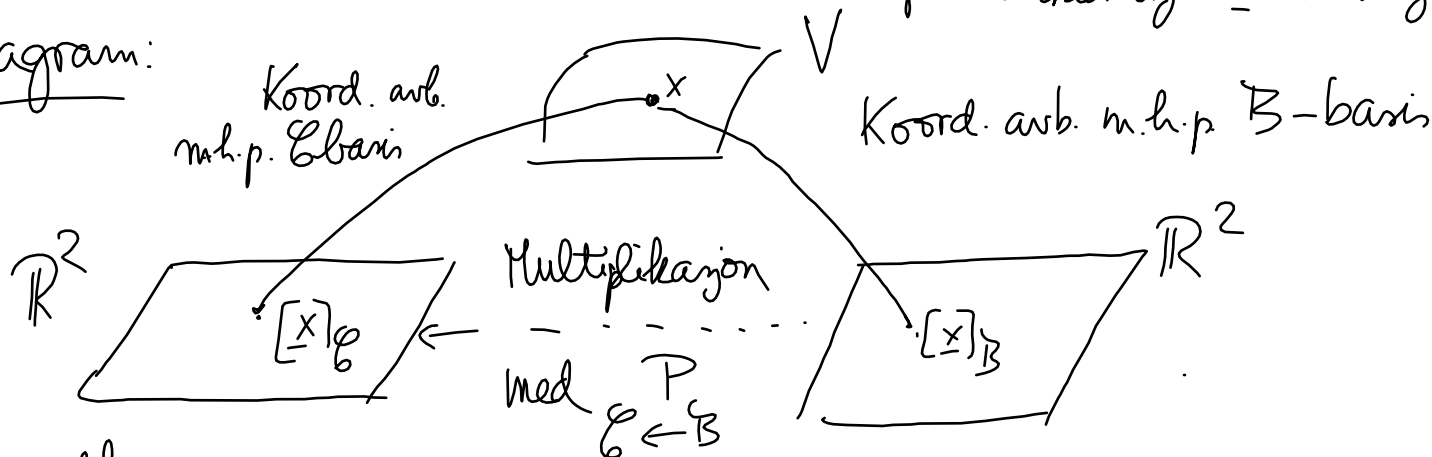
$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot [\underline{x}]_{\mathcal{B}} \Rightarrow [\underline{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \cdot [\underline{x}]_{\mathcal{B}} \Rightarrow \text{matrisen } {}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P.$$

matrise produkt

Setter ${}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P = \begin{bmatrix} [\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$ og har: $[\underline{x}]_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P \cdot [\underline{x}]_{\mathcal{B}}.$

den samme matrisen for vilkårlig $\underline{x}$ vi velger i V .

Diagram:



Generelt

Teorem 15: Gitt $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ og $\mathcal{C} = \{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n\}$, to basiser for et vektorrom V , det fins en og bare en $n \times n$ matrise, betegnet ${}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P$, s.a.

$$[\underline{x}]_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P \cdot [\underline{x}]_{\mathcal{B}}, \text{ for ethvert } \underline{x} \text{ i } V.$$

På eksplisitt form: ${}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P = \begin{bmatrix} [\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} & \dots & [\underline{b}_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}.$

Spørsmål: Hva er ${}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} P$?
(2 beskrivelser.)

$${}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} P = ({}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P)^{-1}.$$

(inversen fins siden $\mathcal{B}$ basis.)

$${}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} P = \begin{bmatrix} [\underline{c}_1]_{\mathcal{B}} & [\underline{c}_2]_{\mathcal{B}} & \dots & [\underline{c}_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

${}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P$ kalles koordinatshiftmatrisen fra basis $\mathcal{B}$ til basis $\mathcal{C}$.

③

I eksempel ① fant vi $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ direkte,

da $\underline{b}_1$ og $\underline{b}_2$ var opplyst i $\mathcal{C}$ -basis ved (1) og (2).

Eksempel: ② $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ er gitt eksplisitt.

→ Metode for å bestemme $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ ved radreduksjon.

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}, \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}, \underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \underline{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Finn $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$

Vel, at $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$.

Vi påstår, at $[\underline{c}_1 \ \underline{c}_2 : \underline{b}_1 \ \underline{b}_2] \sim \begin{bmatrix} I_2 & P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \end{bmatrix}$.

$\uparrow$ 2×2 identitetsmatrisen $\nwarrow$ 2×2

Kan tjekkes, at $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$ er baser for $\mathbb{R}^2$.

$$[\underline{c}_1 \ \underline{c}_2 : \underline{b}_1 \ \underline{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 & -5 \\ -4 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{4r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 7 & -35 & -21 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{7}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{b}_1 = x_1 \underline{c}_1 + x_2 \underline{c}_2 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ løser } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{b}_1 \Leftrightarrow [\underline{c}_1 \ \underline{c}_2]x = \underline{b}_1$$

Samme for $\underline{b}_2$: finner $[\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ved å løse $[\underline{c}_1 \ \underline{c}_2]y = \underline{b}_2$

Tilsammen, radreduksjon til trappeform av $[\underline{c}_1 \ \underline{c}_2 : \underline{b}_1 \ \underline{b}_2]$ gir $[\begin{matrix} I_2 & x & y \end{matrix}]$

$\nwarrow$ 2. ndre kolonne i $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$
 $\nwarrow$ $\begin{bmatrix} [\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$
 $\nwarrow$ $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$

Generelt i dimensjon $n \geq 3$

$$[\underline{c}_1 \ \underline{c}_2 \dots \underline{c}_n : \underline{b}_1 \ \underline{b}_2 \dots \underline{b}_n] \sim \begin{bmatrix} I_n & P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

$\nwarrow$ $x \rightarrow$ første kolonne i $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$

(4)

$$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1}.$$

Minner om: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det A = a \cdot d - b \cdot c$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ invertibel} \quad \text{og} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Eksempel: $V = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ basis, $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ standard basis

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = [\underline{b}_1]_{\mathcal{E}} \quad [\underline{b}_2]_{\mathcal{E}} \quad \dots \quad [\underline{b}_n]_{\mathcal{E}}$$

$$= [\underline{b}_1 \quad \underline{b}_2 \quad \dots \quad \underline{b}_n] = P_{\mathcal{B}} \text{ fra avsnitt 4.4.}$$

⑤

Kort oppsummering av $\text{Nul}(A)$, $\text{Col}(A)$, $\text{Rad}(A)$ og dimensjonene til disse underrommene, samt geometriske egenskaper.

Ser på eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad m=n=3.$$

$\underline{a_1} \quad \underline{a_2} \quad \underline{a_3}$

$\text{Nul}(A)$: underrom av $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ finn utspenningsmengde og $\dim \text{Nul}(A)$

Løser $A\underline{x} = \underline{0} \leadsto [A : \underline{0}] \leadsto$ redusert trappeform $[B : \underline{0}]$ nullitet(A)

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & : & 0 \\ 3 & 0 & -1 & : & 0 \\ 4 & 0 & 5 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - \frac{4}{3}r_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{19}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_1]{\frac{1}{3}r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$B = \text{rref}(A)$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \quad B = \text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1, s_2} A\underline{x} = \underline{0} \xrightarrow[\text{Løsningsmengde}]{\text{Samme}} B\underline{x} = \underline{0}$$

$\uparrow x_1 \quad \uparrow x_2 \quad \uparrow x_3 \quad \text{pivot}$

$$\text{Nul}(A) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \text{nullitet}(A) = \dim \text{Nul}(A) = 1 = \# \text{frie variabler}$$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{Col}(A) = \text{Span} \{ \underline{a_1}, \underline{a_3} \} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} = \text{linjen med ligning } x_1 - x_2 = 0 \text{ i } \mathbb{R}^3$$

