

7/09/2026

MAT 1120

Arvsnitt 5.2-5.4.

Determinant

Teorem 3 Gitt A, B , to $n \times n$ matriser, så:

- a) A invertibel $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- b) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- c) $\det(A^T) = \det(A)$, med A den transponerte til A .
- d) Dersom A er triangulær, er $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$, med $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ inngangene på diagonalen.

Finnes også: egenskaper som er knyttet opp mot rad operasjoner.

Følgende:

Teorem: En $n \times n$ matrise A er invertibel $\Leftrightarrow 0$ er ikke en egenverdi for A .

Bevis: A invertibel $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

$\Leftrightarrow$ ligningen $A\underline{x} = \underline{0}$ har bare løsningen $\underline{x} = \underline{0}$.

$\Leftrightarrow$ ——— $A\underline{x} = \underline{0} \cdot \underline{x}$ ——— $\underline{x}$ ———.

$\Leftrightarrow 0$ er ikke en egenverdi. $\square$

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $\det(A) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$, så A ikke invertibel.

Særlig, er $\lambda = 0$ en egenverdi.

Finnes egenvektor: radredusere $\begin{bmatrix} 2 & 2 & : & 0 \\ 2 & 2 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$.

Egenvektorer: $\underline{x} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 \neq 0$. Velg $\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ egenvektor hørende til 0.

Minner om:

7/09/2026

②

Def To $n \times n$ matriser A og B er similære,

skrives: $A \sim B$, såfremt $B = P^{-1}AP$ for en invertibel matrise P .

↑

$$P^{-1}(A \cdot P) = (P^{-1}A) \cdot P.$$

Eksempel: $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

Ser, at $\det(P) = 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0$, så P invertibel (af Teorem 3).

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 7 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 7 + (-1) \cdot (-4) & (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D. \end{aligned}$$

Ser, at $A \sim D$.

Merk:

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= P(P^{-1}AP)P^{-1} \\ &= \underbrace{(P \cdot P^{-1})}_I \cdot A \cdot \underbrace{(P \cdot P^{-1})}_I \\ &= A. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Så $D \sim A$, med $Q = P^{-1}$ og $A = Q^{-1}DQ$.

Specielt
 $\Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1}DQ)$

$$= \det(Q^{-1}) \cdot \det D \cdot \det(Q)$$

$$= \frac{1}{\det Q} \cdot \det D \cdot \det Q = \det(D).$$

} (*)

Def: En $n \times n$ matrise er diagonaliserbar dersom den er similær med en $n \times n$ diagonal matrise.

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ er diagonaliserbar (forrige eks.). Brug P, D ovenfor.

Dusker: givet en A , hva skriver, at A er (eller ikke er) diagonaliserbar?

7/05/2026

(3)

Dersom A og B er similære $n \times n$ matriser,
har A og B ^{de} samme egenverdier.

Beris: $\otimes \det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I) \rightarrow$ samme karakt. ligning.

Teorem 5 (Karakterisering)

A $n \times n$ matrise

A diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ det finnes n lineært uavhengige vektorer for A .

Tilfelle hvor det er nemt å sjekke: hvis A har n forskjellige egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. $\otimes$

Hvorfor: $\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n$ forskjellige
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \} \implies$ er l.u. i $\mathbb{R}^n$ (Teorem 2).
 egenvektor -"- -"-
 $\dim(\mathbb{R}^n) = n \implies P = [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n]$ invertibel.

Eksempel: Er $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

Har A 3 forskjellige egenverdier? ($n=3$).

Merh: A triangulær, så 4, 7, 2 på diagonalen er egenverdier (Teorem 1).

$\uparrow \uparrow \uparrow$
 3 forskjellige: Svaret er "ja", A diagonaliserbar. (Av $\otimes$)

Eksempel: Er $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

7/05/2026
(4)

Finner først egenverdiene.

Løser karakt. ligning $\det(A - \lambda I) = 0$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \overset{1,1}{1-\lambda} & \overset{1,2}{3} & \overset{1,3}{3} \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0. \text{ Velger å bruke rad } i=1 \text{ i formel for } \det(A)$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{1+1} (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} 3 \det \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} 3 \det \begin{bmatrix} -3 & -5-\lambda \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \cdot (-5-\lambda) \cdot (1-\lambda) - 3 \cdot (-3 \cdot (1-\lambda) - 3 \cdot (-3)) + 3 \cdot (-3 \cdot 3 - 3 \cdot (-5-\lambda)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-5+5\lambda-\lambda+\lambda^2+9) - 3 \cdot (-3+3\lambda+9) + 3 \cdot (-9+15+3\lambda) = 0$$

$\underbrace{-3+3\lambda+9}_{=3\lambda+6} \quad \underbrace{-9+15+3\lambda}_{3\lambda+6}$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda+2)^2 = 0 \text{ med løsninger } 1 \text{ og } -2. \text{ } \underline{\underline{=}} \text{ egenverdier: } \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \text{ (valg av indeksering)}$$

(λ_1 har $m_1=1$, λ_2 har $m_2=2$)

Kan ikke avgjøre om A diag. ved bruk av $\otimes$.

Prøver å bruke Teorem 3. Ser etter, om A har 3 l.u. egenvektorer.

Finner basis for egenrommet hørende til $\lambda_1 = 1$.

-||- $x \neq 0$, løsning for $(A - \lambda_1 I)x = 0$. Finn trappeform for $[(A - I) : 0]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{redusert}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-2r_2 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \quad \text{Løsninger} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ fri

Kan velge $\underline{v}_1$, med $\{\underline{v}_1\}$ basis for egenrommet til $\lambda_1 = 1$.

$\boxed{m_1=1}$

Finner basis for egenrommet hørende til $\lambda_2 = -2$.

$$[(A+2I):0] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & : & 0 \\ -3 & -3 & -3 & : & 0 \\ 3 & 3 & 3 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$\uparrow$ x_1 pivot
 $\uparrow$ x_2 x_3 frie var.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Jakt, } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} \text{ l.u.}$$

$\uparrow$ $\underline{v}_2$ $\uparrow$ $\underline{v}_3$

Teorem 5 $\Rightarrow$ A er diagonaliserbar. ($n_2 = 2$) , Her: $n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3 = n$.

Hvordan finner vi en P og en D s.a. $A = PDP^{-1}$?

Velg, for eksempel, $P = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Da er $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

$\uparrow$ $\underline{v}_1$ $\uparrow$ $\underline{v}_2$ $\uparrow$ $\underline{v}_3$
 $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -2$ $\lambda_3 = -2$

Sjekk: $A = PDP^{-1}$

Merk: $\Leftrightarrow AP = PD$

Rekkefølgen på λ 'er er sammenstemt med den på egenvektorer.

Hvis vi velger $P = [\underline{v}_2, \underline{v}_1, \underline{v}_3]$, må vi velge $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ □

Eksempel: Er $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

B har egenverdier 4, 7, 7. Ser etter, om B har 3 l.u. egenvektorer.

$\lambda_1 = 4$; $[B - 4I : 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 3 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 3 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$ $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\uparrow$ x_1 fri $x_2 = 0, x_3 = 0$ egenvektor til $\lambda_1 = 4$.

$\lambda_2 = 7$ $[B - 7I : 0] = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$
 $\uparrow$ 1 fri variabel $\Rightarrow$ egenrommet hørende til $\lambda_2 = 7$ har dim. = 1. (Her er $n_2 < m_2 = 2$)

B har ikke 3 l.u. egenvektorer $\Rightarrow$ B ikke diagonaliserbar.

Teorem: A $n \times n$ matrise, med $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ^{distinkte} egenverdier, $p \leq n$.

(I) $p = n$, A diag. (av. $\oplus$).

(II) $p < n$; $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_p)^{m_p} \cdot f(\lambda)$, hvor
 $m_1 =$ multiplisitet til λ_1
 $\vdots$
 $m_p =$ ————— $\lambda_p, f(\lambda)$: grad 2 ledd.

Sett $n_k = \dim$ til egenrommet til λ_k , for $k = 1, \dots, p$. Har $n_k \leq m_k$.

A diag. $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^p n_k = n$.

$\Leftrightarrow n_k = m_k$ for hvert $k = 1, \dots, p$.