

8/09/2026

Avsnitt 5.4

Angående diagonalisering av A , $n \times n$ matrise:

(1) Tilfellet $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ forskjellige egenverdier for $A \Rightarrow A$ diagonaliserbar.

(2) Tilfellet A har $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $p < n$, forskjellige egenverdier for A .

Se $p_k \rightarrow$ multiplisitet til λ_k , $k=1, \dots, p \rightarrow$ MAT 1100

$\rightarrow$ dimensjon til egenrommet hørende til λ_k : sett denne n_k

Egenverdi λ_k har multiplisitet $n_k \geq 1$ når: $\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \cdot f(\lambda)$ | $f(\lambda)$ polynom i λ .
 (2.1) $\sum_{k=1}^p n_k < n$: A ikke diagonaliserbar $\leftarrow f(\lambda_k) \neq 0$.

(2.2) $\sum_{k=1}^p n_k = n$: A diagonaliserbar.

$n_k = m_k$ for alle $k=1, \dots, p$, og $\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$.

Fra A matrise $\rightsquigarrow T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.
 lineær transformasjon.

Def: For $T: V \rightarrow V$ lineær, V vektorrom,

en skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi til T dersom det finns $\underline{v} \neq \underline{0}$ i V :

$$T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}.$$

her kalles $\underline{v}$ for egenvektor hørende til λ .

Eksempel (0) $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T(\underline{x}) = A \underline{x}$, A $n \times n$ matrise.

Eksempel (1) (Oppgave 5.4:5)

$T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$, $T(p) = p(0) - p(1)t + p(2)t^2$ for ethvert $p \in \mathbb{P}_2$.

(a) Vis, at T er lineær (ukeoppgave!)

(b) La $p(t) = -2 + t \in \mathbb{P}_2$.

$$T(p) = \underbrace{(-2+0)}_{p(0)} - \underbrace{(-2+1)}_{p(1)}t + \underbrace{(-2+2)}_{p(2)}t^2 = -2 + t = p = 1 \cdot p.$$

$\lambda=1$ egenverdi for T

Fra $T \rightsquigarrow$ matrise til T i en valgt basis B for V . p er en egenvektor hørende til $\lambda=1$.

8/09/2026
(2)

Matrisen til en lineær transformasjon

Gitt: V vektorrom, $T: V \rightarrow V$ linear ($T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$ for alle $a, b \in \mathbb{R}, x, y \in V$.)

og B en basis for V .

Antar, at $\dim V = n$ endelig, så $B = \{ \underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n \}$.

$$\begin{array}{ccc} \underline{x} & \xrightarrow{T} & T(\underline{x}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\underline{x}]_B \in \mathbb{R}^n & \dots \dots \dots \rightarrow & [T(\underline{x})]_B \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Finnes det en $n \times n$ matrise M s.a. $M \cdot [\underline{x}]_B = [T(\underline{x})]_B$?

Gitt $\underline{x} = r_1 \underline{b}_1 + \dots + r_n \underline{b}_n \stackrel{iV}{\in} V$, med $[\underline{x}]_B = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$,

$\Downarrow T$ linear

$$T(\underline{x}) = r_1 T(\underline{b}_1) + \dots + r_n T(\underline{b}_n) \in V.$$

$\Downarrow$ Koordinat avb. $\underline{v} \mapsto [\underline{v}]_B$ er linear

$$[T(\underline{x})]_B = r_1 [T(\underline{b}_1)]_B + \dots + r_n [T(\underline{b}_n)]_B \in \mathbb{R}^n.$$

$$\Leftrightarrow [T(\underline{x})]_B = \underbrace{[T(\underline{b}_1)]_B \dots [T(\underline{b}_n)]_B}_{M = [T]_B \text{ notation}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}}_{[\underline{x}]_B} \in \mathbb{R}^n.$$

Vi har: $\boxed{[T(\underline{x})]_B = [T]_B \cdot [\underline{x}]_B, \forall \underline{x}}$

Koordinat matrisen til T hørende til B .

Eksempel: ② $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

8/09/2026
③

først. $T(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$, A : matrisen til T hørende til standard basisen $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$
 $\nearrow$
 $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$

Sk: $\text{let } A = PDP^{-1}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2$, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ lin. uav. egenvektorer til A

Sett $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$, basis. Hva er $[T]_B$?

$[T]_B = \begin{bmatrix} [T(\underline{v}_1)]_B & [T(\underline{v}_2)]_B \end{bmatrix}$, 2×2 matrise

$T(\underline{v}_1) = A \underline{v}_1 = 5 \underline{v}_1 = 5 \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 \Rightarrow [T(\underline{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $T(\underline{v}_2) = A \underline{v}_2 = 3 \underline{v}_2 = 0 \cdot \underline{v}_1 + 3 \cdot \underline{v}_2 \Rightarrow [T(\underline{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D.$

Eksempel 3 $V = \mathbb{P}_2$, $B = \{1, t, t^2\}$, $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$

$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_1 + 2a_2 t$, for $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2$.

(T er differensiering). Hva $[T]_B$?

$\underline{b}_1 = 1$, $\underline{b}_2 = t$, $\underline{b}_3 = t^2$

$T(1) = 0$, $T(t) = 1$, $T(t^2) = 2t$ $\left(\begin{array}{l} T(t) = 1 \cdot \underline{b}_1 + 0 \cdot \underline{b}_2 + 0 \cdot \underline{b}_3 \\ T(t^2) = 0 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 0 \cdot \underline{b}_3 \end{array} \right)$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $a_0=1, a_1=a_2=0$ $a_0=1, a_1=1, a_2=0$ $a_0=a_1=0, a_2=1$.

$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[T(t)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[T(t^2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Kan sjekke: for $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, $[T(p)]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \leftarrow [p]_B.$

Generell form av eks. 2.

8/09/2026
④

Teorem 8 Antar, at $A = PDP^{-1}$ er $n \times n$ matriser, hvor P er invertibel og D er diagonal. La B være basisen i $\mathbb{R}^n$ dannet ved kolonnene i P . Da er D like matrisen hørende til B for transf. $\underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Hvorfor er diagonal matriser nyttige? Det forenkles mye.

Hvis $A = PDP^{-1}$, er $A^2 = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1})$
 $= PD(\underbrace{P^{-1}P})D^{-1}$
 $= PD^2D^{-1}$

Generelt: $A^k = PD^kP^{-1}$, for alle $k \geq 1$ (Basis: matem. induksjon)
MAT 1100.

Videre: for $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$ er $D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{bmatrix}$, for alle k .
(induksjon).

Numerisk: for å regne ut $P^{-1}BP$: regn ut BP , så finn

reduert trappiform $[P \ BP] \sim \begin{bmatrix} I & C \end{bmatrix}$
 $\uparrow$ $\nwarrow$ er $P^{-1}BP$!
 $n \times n$ identitetmatrise.

8/09/2026 ⑤

Avsnitt 5.5 Komplekse vektorromKomplekse egenverdier og egenvektorer

V : komplekst vektorrom dersom aksiomene fra avsnitt 4.1 holder med skalarer betraktet i $\mathbb{C}$. Så

$$(6) \cdot z \cdot u \text{ definert, for alle } z \in \mathbb{C}, u \in V.$$

$$(7) \cdot z \cdot (u + v) = z \cdot u + z \cdot v, \quad z \in \mathbb{C}, u, v \in V.$$

$$(8) \cdot (z + w) \cdot u = z \cdot u + w \cdot u, \quad z, w \in \mathbb{C} \quad -u -$$

$$(9) \cdot (z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u), \quad -u - \quad -u -$$

Eksempel: $\mathbb{C}^n = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \right\}.$

med operasjoner $\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$

$$z \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} z x_1 \\ \vdots \\ z x_n \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Nytt: til $z \in \mathbb{C}$ finnes entydig $\bar{z} \in \mathbb{C}$ for $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$.
 $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \in \mathbb{R}.$

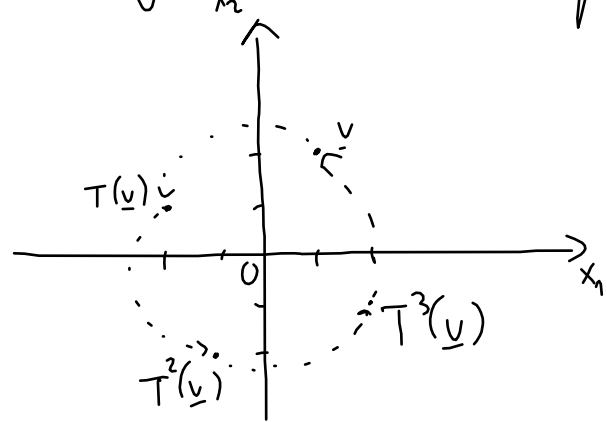
Motivasjon: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(\underline{x}) = A \underline{x}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2×2 reell (reelle innganger) matrise

Den karakt. ligning er $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0. \text{ Løsninger } \boxed{\lambda = \pm i}, \text{ komplekse.}$$

Hva gjør T ? For eksempel, $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.



$$T(\underline{v}) = A \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T^2(\underline{v}) = A(A \underline{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T^3(\underline{v}) = A(A^2 \underline{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T^4(\underline{v}) = A(A^3 \underline{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{v}.$$

T^n danner en
cirkel, $n \geq 1$.

Merk: $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

$A \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ oppfører seg som egenvektor hørende til $\lambda = i$
 $-u$ u $\lambda = -i$

Def: Gitt A , $n \times n$ reell matrise, definer $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $T(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$, $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$. □

En skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ er en egenverdi for T dersom det fins $\underline{v} \neq \underline{0} \in \mathbb{C}^n$ med $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$.

T så fall kalles $\underline{v}$ en (kompleks) egenvektor hørende til den (komplekse) egenverdi λ .

Som for reelle egenv.: λ er (kompleks) egenverdi $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.
 og $\lambda \in \mathbb{C}$.

Eks: $A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$ reell

8/09/2026

$$\det(A - \lambda I) = (0.5 - \lambda)(1.1 - \lambda) + 0.6 \cdot 0.75$$

$$= \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.55 + 0.45$$

$$= \lambda^2 - 1.6\lambda + 1.$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1.6 \pm \sqrt{(1.6)^2 - 4}}{2} = \frac{1.6 \pm 1.2i}{2}$$

$\lambda_1 = 0.8 - 0.6i$ og $\lambda_2 = 0.8 + 0.6i$ er egenverdier til A (begge komplekse).

Hva med egenvektorer?

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -0.3 + 0.6i & -0.6 \\ 0.75 & 0.3 + 0.6i \end{bmatrix}. \text{ Ønsker } \underline{x} \neq \underline{0} \text{ i } \mathbb{C}^2 \text{ s.a. } (A - \lambda_1 I)\underline{x} = \underline{0}. \quad (*)$$

(De finnes!)

$$(*) \text{ blir: } (-0.3 + 0.6i)x_1 - 0.6x_2 = 0. \quad (\#1)$$

$$0.75x_1 + (0.3 + 0.6i)x_2 = 0. \quad (\#2)$$

① Viktig: λ_1 er egenverdi, så $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \underline{0}$, og $(\#1), (\#2)$ gir samme relasjon på x_1 og x_2 .

$\Rightarrow$ Nok å løse en av dem, f.eks. $(\#2)$. $\Rightarrow \frac{3}{4}x_1 = -(0.3 + 0.6i)x_2$. Finn på gode x_1, x_2

$$\Rightarrow \frac{1}{4}x_1 = -(0.1 + 0.2i)x_2$$

$\therefore 3$ begge sider (nemme å regne ut med)

Velg x_2 s.a. vi fjerner desimalene: f.eks. $x_2 = 5$, da er $x_1 = -2 - 4i$

Så $\underline{x} = \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix}$ er en egenvektor hørende til $\lambda_1 = 0.8 - 0.6i$.

② Viktig: Siden $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, kan vi ta $\underline{u} = \begin{bmatrix} \overline{-2 - 4i} \\ \bar{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{bmatrix}$ som egenvektor hørende til λ_2 !

[Generelt: A reell, λ kompleks egenverdi, $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ egenvektor i $\mathbb{C}^2$ for λ ,

sett $\underline{u} = \bar{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}$; $A \cdot \underline{u} = A \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} \underset{A \text{ reell}}{=} \overline{A \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}} = \overline{\lambda \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}} = \bar{\lambda} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \bar{\lambda} \underline{u}.$

Antar $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, reell;

$$\det(C - \lambda I) = (a - \lambda)^2 + b^2; \det(C - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow a - \lambda = \pm i\sqrt{b^2} \begin{cases} \lambda_1 = a - ib \\ \lambda_2 = a + ib = \bar{\lambda}_1 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \underset{\text{antar}}{\neq 0}$$

$$C = r \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix}, \quad \left\| \begin{bmatrix} a/r \\ b/r \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2} = 1 = \left\| \begin{bmatrix} -b/r \\ a/r \end{bmatrix} \right\|.$$

$$a/r = \cos \varphi, \quad b/r = \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

↑
strekke/krymp med r
($r > 1$ / $r < 1$)

↑
rotasjon mot uret, vinkel φ

Teorem A 2×2 reell $\Rightarrow A = PCP^{-1}$, $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$,

og $\lambda_1 = a - bi$, $\lambda_2 = a + bi$ er egenverdier til A ,

samt, med $\underline{x} = \text{Re}(\underline{x}) + i \text{Im}(\underline{x})$, $P = \begin{bmatrix} \text{Re}(\underline{x}) & \text{Im}(\underline{x}) \end{bmatrix}$

Eks: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \leadsto$ rotasjon;

↑ $\mathbb{R}^2$ ↗ $\mathbb{R}^2$