

MAT1120 Ukeoppgaver

Høst 2026

Oppgavenummer gjelder Lay-Lay-McDonald (2021); *Linear Algebra and Its Applications*, 6e utgave.

1 Fra Uke 34

Seksjon 4.1

Oppgave 5

La $\mathbb{P}_n$ være vektorrommet av alle polynomer med grad n eller mindre. Avgjør om mengden av alle polynomer av formen $p(t) = at^2$, der a er i $\mathbb{R}$, er et underrom av $\mathbb{P}_n$, for en passende verdi av n . Begrunn svaret ditt.

Oppgave 12

La W være mengden av alle vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} s + 3t \\ s - t \\ 2s - t \\ 4t \end{bmatrix}.$$

Vis at W er et underrom av $\mathbb{R}^4$.

Oppgave 15

La W være mengden av alle vektorer av formen

$$\begin{bmatrix} 3a + b \\ 4 \\ a - 5b \end{bmatrix},$$

der a og b representerer vilkårlige reelle tall. Finn en mengde S som utspenner W som et underrom av $\mathbb{R}^3$, eller gi et eksempel som viser at W er *ikke* et vektorrom.

Oppgave 44 (ekstra)

Avgjør om y er i underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av søylene av A , der

$$y = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 8 & 7 & -6 \\ -5 & -8 & 3 \\ 2 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Seksjon 4.2

Oppgave 3

Betrakt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Finn en eksplisitt beskrivelse av $\text{Nul } A$ ved å liste vektorer som utspenner nullrommet.

Oppgave 24

Betrakt

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Avgjør om w er i $\text{Col } A$. Ligger w i $\text{Nul } A$?

Oppgave 52

La $H = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ og $K = \text{Span}\{v_3, v_4\}$, der

$$v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ -28 \end{bmatrix}.$$

H og K er underrom av $\mathbb{R}^3$. Mer spesifikt er H og K plan i $\mathbb{R}^3$ gjennom origo 0 som krysser hverandre i en linje gjennom 0 . Finn en ikke-null vektor w som utspenner denne linjen. (Hint: w kan skrives som både $c_1v_1 + c_2v_2$ og $c_3v_3 + c_4v_4$. For å finne w , løs ligningen $c_1v_1 + c_2v_2 = c_3v_3 + c_4v_4$ for de ukjente c_j .)

Seksjon 4.3

Oppgave 3

Avgjør om mengden av vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en basis for $\mathbb{R}^3$. Hvis det er *ikke* en basis, avgjør hvilke av disse vektorene er lineært uavhengig, og hvilke utspenner $\mathbb{R}^3$. Begrunn svaret ditt.

Oppgave 12

Finn en basis for mengden av vektorer i $\mathbb{R}^2$ på linjen $y = 5x$.

Oppgave 36 (ekstra)

I vektorrommet av alle reellverdier funksjoner, finn en basis for underromet utspent av

$$\{\sin t, \sin 2t, \sin t \cos t\}.$$

2 Fra Uke 35

Seksjon 4.3

Oppgave 19

Betrakt

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$

og $H = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Vi har $4v_1 + 5v_2 - 3v_3 = 0$. Bruk denne informasjonen til å finne en basis for H . (Det finnes flere svar.)

Oppgave 44 (ekstra)

Betrakt polynomene

$$p_1(t) = 1 + t^2, p_2(t) = 1 - t, p_3(t) = 2.$$

Finn et lineærh avhengighetsforhold mellom p_1 , p_2 og p_3 . Deretter, finn en basis for $\text{Span}\{p_1, p_2, p_3\}$.

Seksjon 4.4

Oppgave 1

Finn vektoren x bestemt ved basisen $\mathcal{B}$ og koordinatvektoren $[x]_{\mathcal{B}}$, der

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \quad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 8

Finn koordinatvektoren $[x]_{\mathcal{B}}$ til x i forhold til basisen $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$, der

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 25

Betrakt

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}.$$

Siden koordinatavbildningen relativt til $\mathcal{B}$ er en lineær transformasjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$, kan denne avbildningen representeres ved en 2×2 -matrise A . Finn A .

Oppgave 31

Bruk koordinatvektorer til å avgjøre om mengden

$$\{1 + 2t^3, 2 + t - 3t^2, -t + 2t^2 - t^3\}$$

er lineært uavhengig. Begrunn svaret ditt.

Seksjon 4.5

Oppgave 3

Finn en basis og dimensjonen til

$$\left\{ \begin{bmatrix} s - 2t \\ s + t \\ 3t \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Oppgave 10

Finn dimensjonen til underrommet utspent av vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 13

Finn dimensjonen til $\text{Nul } A$, $\text{Col } A$ og $\text{Row } A$, der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

3 Fra Uke 36

Seksjon 4.6

Oppgave 1

La $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ og $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ være basiser til et vektorrom V , og anta at $b_1 = 6c_1 - 2c_2$ og $b_2 = 9c_1 - 4c_2$.

- Finn koordinatskiftmatrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.
- Finn $[x]_{\mathcal{C}}$ til $x = -3b_1 + 2b_2$. Bruk oppgave (a).

Oppgave 8

Betrakt basisene $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ og $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ til $\mathbb{R}^2$, der

$$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Finn koordinatskiftmatrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$, og koordinatskiftmatrisen fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$.

Oppgave 15 (valgfri)

I vektorrommet $\mathbb{P}_2$, finn koordinatskiftmatrisen fra basisen $\mathcal{B} = \{1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2\}$ til standardbasen $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$. Deretter finn $\mathcal{B}$ -koordinatvektoren til $-1 + 2t$.

Oppgave 16

I vektorrommet $\mathbb{P}_2$, finn koordinatskiftmatrisen fra basisen $\mathcal{B} = \{1 - 3t^2, 2 + t - 5t^2, 1 + 2t\}$ til standardbasen. Deretter skriv t^2 som en lineær kombinasjon av polynomene i $\mathcal{B}$.

Oppgave 22 (ekstra)

La $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$, $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ og $\mathcal{D} = \{d_1, d_2\}$ være basiser for et 2-dimensjonalt vektorrom.

- Skriv opp en ligning som relaterer koordinatskiftmatrisene ${}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^P$, ${}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}}^P$ og ${}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}^P$. Begrunn svaret ditt.
- Bruk et matematikkprogramvare til å hjelpe deg med å finne ligningen, eller til å kontrollere ligningen du har skrevet. Betrakt tre basiser til $\mathbb{R}^2$, f.eks. basiser slik som dem du finner i oppgavene 7–10.

Seksjon 5.1

Oppgave 2

Er $\lambda = 2$ en egenverdi til matrisen

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}?$$

Hvorfor, eller hvorfor ikke?

Oppgave 5

Er v en egenvektor til A , der

$$v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}?$$

Hvis ja, finn den tilhørende egenverdien.

Oppgave 20

Uten (komplisert) beregning, finn en egenverdi og to tilhørende lineært uavhengige egenvektorer til

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Begrunn svaret ditt.

Seksjon 5.2

Oppgave 3

Finn det karakteristiske polynomet og egenverdiene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4

Finn det karakteristiske polynomet og egenverdiene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 18 (ekstra)

Det kan vises at den algebraiske multiplisiteten til en egenverdi λ alltid er større enn eller lik dimensjonen til det tilhørende egenrommet. Finn en passende verdi til h i matrisen A , der

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 9 & h & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

slik at egenrommet til $\lambda = 6$ er 2-dimensionalt.

4 Fra Uke 37

Seksjon 5.3

Oppgave 2

Finn A^4 gitt $A = PDP^{-1}$, der

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 9

Diagonaliser matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

hvis mulig.

Oppgave 12

Diagonaliser matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

hvis mulig. Egenverdiene til denne matrisen er $\lambda = 1, 4$.

Seksjon 5.4

Oppgave 2

La $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ være en basis til et vektorrom V . Betrakt lineærtransformasjonen $T: V \rightarrow V$ gitt ved

$$T(b_1) = 7b_1 + 4b_2, \quad T(b_2) = 6b_1 - 5b_2.$$

Finn $[T]_{\mathcal{B}}$, matrisen for T relativt til $\mathcal{B}$.

Oppgave 8

Finn $\mathcal{B}$ -matrisen til transformasjonen $x \mapsto Ax$, med $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$, der

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 15

Betrakt transformasjonen $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ ved $T(p) = p(1) + p(1)t + p(1)t^2$.

- Finn $T(p)$ når $p(t) = 1 + t + t^2$. Er p en egenvektor til T ? Hvis p er en egenvektor, hva er den tilsvarende egenverdien?
- Finn $T(p)$ når $p(t) = t - t^2$. Er p en egenvektor til T ? Hvis p er en egenvektor, hva er den tilsvarende egenverdien?

Oppgave 22 (ekstra)

Bevis denne: Hvis en matrise A er similær til B , så er A^2 similær til B^2 .

Seksjon 5.5

Oppgave 3

Betrakt matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},$$

og den tilsvarende lineære transformasjonen på $\mathbb{C}^2$. Finn egenverdiene, og en basis til hvert egenrom i $\mathbb{C}^2$.

Oppgave 8

Hvis C er matrisen gitt ved

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

hvor a og b er ikke-null reelle tall, så er egenverdiene av C gitt ved $\lambda = a \pm bi$. Dessuten, med $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$, har vi

$$C = r \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

hvor φ er vinkelen mellom x -aksen og linjen fra origo $(0, 0)$ gjennom (a, b) . Bruk dette og finn egenverdiene til

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ -3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Finn vinkelen φ i intervallet $-\pi < \varphi \leq \pi$ og skalafaktoren r .

5 Fra Uke 38

Seksjon 5.6

Oppgave 1

La A være en 2×2 -matrise med egenverdier 3 og $1/3$, med tilhørende egenvektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La $\{x_k\}$ være en løsning til differanseligningen $x_{k+1} = Ax_k$, med

$$x_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Bestem $x_1 = Ax_0$. (Hint: Man trenger ikke å vite selve matrisen A .)
- Finn en formel til x_k som involverer k og egenvektorene v_1 og v_2 .

Oppgave 2

Anta at egenverdiene til en 3×3 -matrise A er 3, $4/5$ og $3/5$, med tilhørende egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Dessuten, la

$$x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Finn løsningen til ligningen $x_{k+1} = Ax_k$ for denne x_0 , og beskriv hva som skjer når $k \rightarrow \infty$.

Seksjon 5.7

Oppgave 1

En partikkel som beveger seg i et plant kraftfelt har en posisjonsvektor x som oppfyller $x' = Ax$. Den 2×2 -matrisen A har egenverdier 4 og 2, med tilhørende egenvektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finn partikkelens beliggenhet ved tid t , gitt at

$$x(0) = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

La A være en 2×2 -matrise med egenverdier -3 og -1 , med tilhørende egenvektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La $x(t)$ være beliggenheten til en partikkel ved tid t . Løs initialverdiproblemet

$$x' = Ax, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I oppgavene 3 og 4, løs initialverdiproblemet $x'(t) = Ax(t)$ for $t \geq 0$, med $x(0) = (3, 2)$. Klassifiser egenskapen til origo som en attraktor, repeller eller sadelpunkt for det dynamiske systemet gitt ved $x' = Ax$. Finn retningene av størst tiltrekning og/eller størst frastøtning. Dersom origo er et sadelpunkt, skisser typiske baner.

Oppgave 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

6 Fra Uke 39**Seksjon 5.7**

I oppgavene 5 og 6, løs initialverdiproblemet $x'(t) = Ax(t)$ for $t \geq 0$, med $x(0) = (3, 2)$. Klassifiser egenskapen til origo som en attraktor, repeller eller sadelpunkt for det dynamiske systemet gitt ved $x' = Ax$. Finn retningene av størst tiltrekning og/eller størst frastøtning. Dersom origo er et sadelpunkt, skisser typiske baner.

Oppgave 5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

Oppgave 6

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 7

Finn et koordinatsskift som avkobler ligningen $x' = Ax$ med matrisen A fra oppgave 5. Skriv $x(t) = Py(t)$, og vis beregningen som fører frem til den avkoblede ligningen $y' = Dy$, ved å angi P og D .

Seksjon 5.8

I oppgavene 1 og 2, betrakt matrisen A og en rekke $\{x_k\}$ som ble produsert av potensmetoden. Bruk disse dataene til å estimere den største egenverdien til A , og angi en tilsvarende egenvektor.

Oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2414 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2486 \end{bmatrix}, \quad x_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2498 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

$$A = \begin{bmatrix} 1,8 & -0,8 \\ -3,2 & 4,2 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -0,5625 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} -0,3021 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ x_4 = \begin{bmatrix} -0,2601 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_5 = \begin{bmatrix} -0,2520 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Seksjon 5.9**Oppgave 2**

Et forsøksdyr kan spise én av tre typer mat hver dag. Laboratoriets opptegnelser viser at dersom dyret velger en bestemt type mat i ett forsøk, vil det velge samme type i neste forsøk med sannsynlighet 50%, og hver av de andre to typene mat med sannsynlighet 25%.

- Hva er overgangsmatrisen for denne situasjonen?
- Hvis dyret velger mat #1 i det første forsøket, hva er sannsynligheten for at det velger mat #2 i det andre forsøket?

I oppgavene 6 og 7, finn likevektsvektorene til matrisen A .

Oppgave 6

$$A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Oppgave 7

$$A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Oppgave 12

Med utgangspunkt i oppgaven 2, hvilken type mat foretrekker dyret etter mange forsøk?

Oppgave 26

I Roma har Eurocar Rent A Car en flåte på omtrent 2500 biler. Mønsteret for utleie- og retursteder er angitt som brøker i tabellen nedenfor. På en typisk dag, omtrent hvor mange biler vil være tilgjengelige for utleie fra Fiumicino lufthavn?

Utleie fra:			Retur til:
Ciampino Lufthavn	Tog-stasjon	Fiumicino Lufthavn	
0,90	0,02	0,08	Ciampino Lufthavn
0,02	0,90	0,02	Togstasjon
0,08	0,08	0,90	Fiumicino Lufthavn

Fra Uker 40 og 41**Seksjon 6.1**

I oppgavene fra 1–7, beregn de gitte kvantitetene ved å bruke vektorer

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 1

$$u \cdot u, \quad v \cdot u, \quad \frac{v \cdot u}{u \cdot u}$$

Oppgave 3

$$\frac{1}{w \cdot w} w$$

Oppgave 5

$$\left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v} \right) v$$

Oppgave 2**Oppgave 7**

$$w \cdot w, \quad x \cdot w, \quad \frac{x \cdot w}{w \cdot w}$$

$$\|w\|$$

Oppgave 9

Finn en enhetsvektor i retningen av vektoren

$$\begin{bmatrix} -30 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 13

Finn avstanden mellom

$$x = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 31 (valgfri)

Betrakt

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Beregn og sammenlign

$$u \cdot v, \quad \|u\|^2, \quad \|v\|^2, \quad \|u + v\|^2.$$

Ikke bruk Pytagoras' læresetning.

Seksjon 6.2

Oppgave 7

Vis at $\{u_1, u_2\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^2$, og deretter skriv x som en lineær kombinasjon av u_1 og u_2 , der

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 11

Beregn den ortogonale projeksjonen av u på linjen gjennom v og origo, der

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 16

Betrakt

$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Beregn avstanden fra y til linjen gjennom u og origo.

Seksjon 6.3

Oppgave 1

Betrokt en ortogonal basis $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ til $\mathbb{R}^4$ og x , der

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Skriv x som $y + z$, der $y \in \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$ og $z \in \text{Span}\{u_4\}$.

Oppgave 11

Finn det nærmeste punktet til y i underrommet W utspent av v_1 og v_2 , der

$$y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 14 (valgfri)

Finn den beste tilnærmeringen til z av vektorer av formen $c_1 v_1 + c_2 v_2$, der

$$z = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 17

Betrakt

$$y = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

og sett $W = \text{Span}\{u_1, u_2\}$.

- Sett $U = [u_1 \ u_2]$. Beregn $U^T U$ og $U U^T$.
- Beregn $\text{proj}_W y$ (den ortogonale projeksjonen av y på W) og $U U^T y$.

7 Fra Uke 42

Seksjon 6.4

I oppgavene 2 og 4, de gitte vektorene er en basis for et underrom W av $\mathbb{R}^3$. Bruk Gram-Schmidt-prosessen til å finne en ortogonal basis for W .

Oppgave 2

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -8 \\ 17 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 14

Kolonnene til Q kommer fra en anvendelse av Gram-Schmidt-prosessen på kolonnene til A . Finn en øvretriangulær matrise R slik at $A = QR$. Verifiser svaret.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -2/7 & 5/7 \\ 5/7 & 2/7 \\ 2/7 & -4/7 \\ 4/7 & 2/7 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 26

La $u_1, \dots, u_p$ være en ortonormal basis for et underrom W av $\mathbb{R}^n$, og la $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ være definert ved $T(x) = \text{proj}_W x$. Vis at T er lineær.

Seksjon 6.5

Oppgave 2

Finn en minste kvadraters løsning av $Ax = b$ ved å løse de tilhørende normalligningene.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 10

Finn den ortogonale projeksjonen av b på $\text{Col}(A)$ og en minste kvadraters løsning av ligningssystemet $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 16 (valgfri)

Bruk QR-faktoriseringen $A = QR$ til å finne en minste kvadraters løsning til $Ax = b$, der

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

8 Fra Uke 43

Seksjon 6.6

Oppgave 2

Finn ligningen til linja $y = \beta_0 + \beta_1 x$ som best approksimerer punktene $(1,0)$, $(2,1)$, $(4,2)$, $(5,3)$.

Oppgave 6

Hvis en maskin lærer en minste kvadraters linje som best passer punktene i forrige oppgave, hva vil maskinen gi som y -verdi dersom $x = 3$?

Oppgave 14

Kurven $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$ modellerer ofte godt de variable kostnadene til en bedrift som en funksjon av salgsinntektene x . Siden de faste kostnadene ikke er inkludert, er det ikke et konstantledd i ligningen.

a. Gi designmatrisen og parametervektoren for den lineære modellen som leder til en minste kvadraters løsning til ligningen over med data $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

b. Finn minste kvadraters kurven for dataene

$$(4, 1,58), (6, 2,08), (8, 2,5), (10, 2,8), (12, 3,1), (14, 3,4), (16, 3,8), (18, 4,32).$$

c. Hvis en maskin lærte kurven i b, hva vil den gi som svar til verdien $x = 9$?

Seksjon 6.7

Oppgave 16

Anta at $\{u, v\}$ er et ortonormalt sett (dvs. $\|u\| = \|v\| = 1$ og $\langle u, v \rangle = 0$) i et indreproduktrom. Vis at $\|u - v\| = \sqrt{2}$.

Oppgave 25

La $a, b \geq 0$, og betrakt vektorer

$$u = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \sqrt{b} \\ \sqrt{a} \end{bmatrix}.$$

Bruk Cauchy-Schwarz-ulikheten til å sammenligne det geometriske gjennomsnittet $\sqrt{ab}$ og det aritmetiske gjennomsnittet $\frac{a+b}{2}$.

Oppgave 26

La

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bruk Cauchy-Schwarz-ulikheten for å vise

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$