

MAT1120

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 1. oktober 2026, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av $\text{\LaTeX}$). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Kravet for å få godkjent denne oppgaven er at den er levert inn (i Canvas). Du velger selv hvor mange av punktene i de ulike oppgavene du løser.

Oppgave 1. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Finn en basis for kolonnerrommet $\text{Col}(A)$. Bestem rangen til A .
- (b) Beskriv nullrommet $\text{Nul}(A)$ til A .
- (c) Finn en basis for $\text{Rad}(A)$, radrommet (rekkerommet) til A .

Oppgave 2. Bestem egenverdier og finn tilhørende egenvektorer for de følgende matrisene. Avgjør i hvert tilfelle om matrisen er diagonaliserbar.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3. La $\mathbb{P}_3$ være vektorrommet av polynomer av grad høyst 3. Vi lar $\mathcal{E} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ være delmengden av $\mathbb{P}_3$ bestående av polynomene

$$\mathbf{p}_1(t) = 1, \quad \mathbf{p}_2(t) = t, \quad \mathbf{p}_3(t) = t^2, \quad \mathbf{p}_4(t) = t^3,$$

hvor $t \in \mathbb{R}$. Det er antatt kjent at $\mathcal{E}$ er standardbasen for $\mathbb{P}_3$.

(a) La $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4$ i $\mathbb{P}_3$ være definert som

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1(t) &= 1 + t, \\ \mathbf{q}_2(t) &= t + t^2, \\ \mathbf{q}_3(t) &= t + t^3, \\ \mathbf{q}_4(t) &= t^3. \end{aligned}$$

Vis at $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\}$ er lineært uavhengig i $\mathbb{P}_3$. Du kan for eksempel bruke koordinatavbildningen med hensyn på $\mathcal{E}$.

- (b) Forklar hvorfor $\mathcal{B} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\}$ er en basis for $\mathbb{P}_3$. Bestem koordinatskiftematrissen $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ fra basis $\mathcal{B}$ til standardbasen $\mathcal{E}$.
- (c) En lineær avbildning $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ er gitt ved

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = \frac{1}{2}a_1 + a_2t + \frac{3}{2}a_3t^2,$$

hvor $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ er et vilkårlig element i $\mathbb{P}_3$. (Du trenger ikke vise at T er lineær.)

Finn matrissen $[T]_{\mathcal{E}}$ til T med hensyn på basen $\mathcal{E}$.

- (d) Finn også matrissen $[T]_{\mathcal{B}}$ til T med hensyn på basen $\mathcal{B}$.

Oppgave 4. Betrakt det dynamiske systemet bestemt ved differensligningen $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ med matrissen gitt som

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,4 \\ 0,3 & 1,2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Finn $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ gitt at

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (b) Finn den generelle løsningen $\mathbf{x}_k$ til differensligningen. Avgjør om origo $\mathbf{0}$ er et saddepunkt, en attraktor eller en frastøter når $k \rightarrow \infty$.