MAT1120 - Oppgaver H07

Oppgave 1.

Merk : Til denne oppgaven er det vedlagt noen Matlab-kjøringer som du har lov til å henvise til hvis/når du finner det hensiktsmessig.

a) La $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bestem rang M og dim Nul M.

Løsning: Matlab-kjøringen viser at den reduserte trappeformen til M, rref(M), har tre pivoter; så rang $M = 3$. Dermed er dim Nul M = 4 - 3 = 1.

Betrakt nå vektorrommet $\mathbb{P}_3$ som består av alle polynomer av grad høyst 3 i en reell variabel x.
La $S = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ der

$$\mathbf{q}_1(x) = x + x^2 + x^3,\ \mathbf{q}_2(x) = 1 + x,\ \mathbf{q}_3(x) = 1 + x^2 + x^3.$$

La H være underrommet av $\mathbb{P}_3$ gitt ved $H = \operatorname{Span} S$.

b) Begrunn at S er lineært uavhengig og angi dim H.

Løsning: Vi lar $\mathcal{B}$ betegne standardmatrisen til $\mathbb{P}_3$ (ordnet på vanlig måte). Da er $[S_{\mathcal{B}}] = [[\mathbf{q}_1]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{q}_2]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{q}_3]_{\mathcal{B}}] = N$ der N består av de tre første kolonnene til M. Matlab-kjøringen viser at den redusertetrappeformen til N, rref(N), har pivoter i alle kolonner. Så $S_{\mathcal{B}}$ er lin. uavh. i $\mathbb{R}^4$, og dermed er S lin. uavh. i $\mathbb{P}_3$.
Siden S er lin. uavh. og utspenner H (p. def.), så er S en basis for H. Derfor er dim $H = 3$.

c) Begrunn at $1 \in H$. Bestem deretter en basis for $\mathbb{P}_3$ som inneholder S.

Løsning: Fra rref(M) kan vi lese at $[1]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_1$ er en lineær komb. av vektorene i $S_{\mathcal{B}}$. Samme lin. avhengighetsrelasjon holder derfor mellom 1 og vektorene i S (spesifikt har vi at $1 = (-1/2)\mathbf{q}_1 + (1/2)\mathbf{q}_2 + (1/2)\mathbf{q}_3$). Dermed er $1 \in \operatorname{Span} S = W$.
Matlab-kjøringen angir også rref(R), der $R = [N\ I_4]$. Matrisen rref(R) har pivoter i de tre første kolonnene og i den sjette. Dette betyr at de tilsvarende kolonnene i R danner en basis for Col R, dvs for $\mathbb{R}^4$ (siden Col R inneholder standardbasisen for $\mathbb{R}^4$). Nå er den sjette kolonnen i R lik $\mathbf{e}_3$, og vi har at $[x^2]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_3$. Dermed vil S sammen med x^2 danne en basis for $\mathbb{P}_3$.

Oppgave 2.

a) La $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Begrunn at B er diagonaliserbar og bestem en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at $B = P\,D\,P^{-1}$.

Løsning: Matrisen B er opplagt symmetrisk. Dermed er den (ortogonalt) diag. bar.

Man regner lett ut at det kar. polynomet til B er $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$. Egenverdiene til B er derfor 1 og 6. En basis for $E_1 = \text{Nul}(B - I_2)$ finner man er f.eks. $\{(2, -1)\}$ mens en basis for $E_6 = \text{Nul}(B - 6\,I_2)$ er f.eks. $\{(1, 2)\}$.

Vi kan derfor velge $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

b) Finn løsningen til systemet av differensiallikninger

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2\,x_1(t) + 2\,x_2(t), \\ x_2'(t) &= 2\,x_1(t) + 5\,x_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

som tilfredsstiller at $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 0$.

Løsning: Systemet kan skrives som $\mathbf{x}'(t) = B\,\mathbf{x}(t)$ der B er som i a). Fra matrisene P og D vi fant der vet vi at den generelle løsningen av systemet er

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{6t}$$

der $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Nå må vi ha at $\mathbf{x}(0) = (5, 0)$. Insetting av $t = 0$ ovenfor gir at $2c_1 + c_2 = 5$ og $-c_1 + 2c_2 = 0$, i.e. $c_1 = 2, c_2 = 1$. Løsningen som skulle bestemmes er derfor

$$\mathbf{x}(t) = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{6t} = \begin{bmatrix} 4e^t + e^{6t} \\ -2e^t + 2e^{6t} \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3.

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $W = \text{Col}\,A$.

Vi betraker $\mathbb{R}^3$ med sitt vanlige indreprodukt (prikkproduktet).

a) Finn en ortogonal basis for W og beregn $\hat{\mathbf{y}} = \text{Proj}_W(\mathbf{y})$.

Løsning: La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ betegne kolonnene til A. Disse danner opplagt en basis for W. Gram-Schmidt prossessen anvendt på denne basisen gir at

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, 1, 0),\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{2}{2}\mathbf{b}_1 = (1, -1, 1)$$

danner en ortogonal basis for W.

Dermed er $\hat{\mathbf{y}} = \text{Proj}_W(\mathbf{y}) = \frac{2}{2}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2 = (4/3, 2/3, 1/3)$.

b) Finn minstekvadraters løsning av det (inkonsistente) systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Løsning:
Man regner lett at $A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ og $A^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Ved å løse normal likningene $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$ finner man at minstekvadr. løsning av systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$ er
$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.
Merk: $\hat{\mathbf{x}}$ kan også enkelt bestemmes ved å løse $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}}$, som opplagt gir samme svar !

c) Bestem singulærverdiene til A.

Løsning: Vi har sett at $A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, så $A^T A = B$ der B er matrisen fra oppgave 2. Der fant vi at B har egenverdier 6 og 1.
De singulære verdiene til B er derfor $\sigma_1 = \sqrt{6}$ og $\sigma_2 = \sqrt{1} = 1$.

d) Bestem en singulærverdi dekomposisjon $A = U\,\Sigma\,V^T$ for A.

Løsning: Fra c) får vi at $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Fra utregningen i 2a) får vi (etter normalisering) at en o.n. egenvektorbasis for B består av $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Som den ortogonale matrisen V kan vi derfor velge
$V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
Videre, la $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\,A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
og $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2}\,A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Vi velger så en enhetsvektor $\mathbf{u}_3$ som er ortogonal på Col$A = W$, f.eks.
$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (Beregnet her $\mathbf{u}_3 = (1/\|\mathbf{z}\|)\mathbf{z}$ der $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \in W^\perp$. Vi kunne også ha benyttet oss av kryssproduktet $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ som $\mathbf{z}$).
Som den ortogonale matrisen U kan vi dermed velge
$$U = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{30} & 0 & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

e) La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineæravbildningen som er gitt ved

$$T(\mathbf{x}) = 2\,\mathrm{Proj}_W(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\,, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

(Avbildningen T er den ortogonale speilingen gjennom planet W.)

Bestem standardmatrisen $[T]$ til T og matrisen $[T]_\mathcal{B}$ til T med hensyn på $\mathcal{B}$ der $\mathcal{B}$ er basisen for $\mathbb{R}^3$ som består av kolonnene til matrisen U du fant i punktet d) ovenfor.

Løsning: Siden $\{\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2\}$ er en o.n. basis for $\mathrm{Col}\, A = W$, så er stand.matrisen til Proj_W gitt ved

$$Q = [\mathbf{u}_1\;\mathbf{u}_2]\,[\mathbf{u}_1\;\mathbf{u}_2]^T = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(Her kan man alternativt utnytte pkt a), som gir en annen o.n. basis for W, men samme matrise Q). Dermed er stand.matrisen til T gitt ved

$$[T] = 2\,Q - I_3 = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

La så $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2,\, \mathbf{u}_3\}$.
Siden $\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2 \in W$ er $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1$ og $T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$.
Siden $\mathbf{u}_3 \in W^\perp$ er $T(\mathbf{u}_3) = -\mathbf{u}_3$.

Dermed er $[T]_\mathcal{B} = \mathrm{diag}\,(1, 1, -1)$.

Merk : U er koordinatskifte matrisen fra $\mathcal{B}$ til stand.basisen. Så man kan også finne standardmatrisen til T ved åbestemme $[T]_\mathcal{B}$ først (som ovenfor), og deretter regne ut $[T]$ ved å bruke at $[T] = U[T]_\mathcal{B}U^T = ...$