

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT1120 — Lineær algebra.

Eksamensdag: Mandag 7. desember 2009.

Tid for eksamen: 14.30 – 17.30

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Under sensureringen teller i utgangspunktet alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 3 osv.) 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

### Oppgave 1

I denne oppgaven er  $A$  matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

- Finne en basis for søylerommet til  $A$ .
- Finne en basis for nullrommet til  $A$ .
- Finne en ortogonal basis for søylerommet til  $A$ .
- Vis at projeksjonen av  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  ned på søylerommet til  $A$  er

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Finne alle minste kvadraters løsninger av det inkonsistente ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

(Fortsettes på side 2.)

## Oppgave 2

I denne oppgaven er  $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ .

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til  $B$ .

b) Finn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B^n \mathbf{x}}{7^n}$  når  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

I resten av oppgaven skal vi finne singularverdidekomposisjonen  $A = U\Sigma V^T$  til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Bruk resultatene i a) til å finne  $\Sigma$  og  $V$ .

d) Finn  $U$ .

## Oppgave 3

I denne oppgaven er  $U$  og  $V$  to underrom av et endeligdimensjonalt vektorrom  $H$ . Vi lar

$$U \cap V = \{\mathbf{x} \in H \mid \mathbf{x} \text{ er med i både } U \text{ og } V\}$$

og

$$U + V = \{\mathbf{x} \in H \mid \mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \text{ der } \mathbf{u} \in U \text{ og } \mathbf{v} \in V\}$$

Man kan vise at

(I)  $U \cap V$  er et underrom av  $H$ .

(II)  $U + V$  er et underrom av  $H$ .

Vis én av påstandene (I) og (II), du kan selv velge hvilken. Vis også at

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

(*Hint*: Start med en basis for  $U \cap V$  og utvid den til basiser for  $U$  og  $V$ .)

SLUTT