Eksamen i MAT1120, 7/12 2009: Løsningsforslag

Oppgave 1: a) Radoperasjoner gir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at de to første søylene er pivotsøyler, og de tilsvarende søylene i A danner dermed en basis. Vi har altså basisvektorer

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Vi må finne alle løsningene $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Bruker vi radreduksjonen ovenfor, ser vi at trappeformen til den utvidete matrisen er

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette betyr at z og u er frie variable, og at $y = z + u$, $x = -2y + u = -2(z + u) + u = -2z - u$. Dermed er

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z - u \\ z + u \\ z \\ u \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette betyr at

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en basis for nullrommet.

c) Vi bruker Gram-Schmidt-prosedyren på basisen i a). Vi får

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x_2} \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Siden vi bare trenger en orto*gonal* basis, kan vi fjerne den irriterende faktoren 1/3 og bruke basisvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

d) Projeksjonsformelen gir oss

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|^2}\mathbf{v}_2 = \frac{3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{42}{42}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e) Vi vet at en minste kvadraters løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ er det samme som en vanlig løsning av $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}}$. Den utvidede matrisen til dette systemet er

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Radreduserer vi på samme måte som i punkt a), får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bruker vi variablene x, y, z, u, ser vi at u og z er frie, mens y og x er gitt ved $y = 3 + z + u$, $x = 6 - 2y + u = 6 - 2(3 + z + u) + u = -2z - u$. Løsningene er dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z - u \\ 3 + z + u \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

der z, u er fritt valgte, reelle tall.

Oppgave 2 a) Finner først egenverdiene

$$0 = \det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -1 \\ -1 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2 - 1 \Longleftrightarrow \lambda = \begin{cases} 7 \\ 5 \end{cases}$$

Med $\lambda_1 = 7$, må egenvektorene tilfredstille.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dette gir betingelse $x = y$, og vi kan f.eks. velge $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tilsvarende regninger for $\lambda_2 = 5$, gir betingelsen $x = -y$, og vi velger $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Vi kan skrive $\mathbf{x}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene: $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{v}_2$. Bruker vi B^n på dette uttrykket får vi

$$B^n\mathbf{x} = c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2 = c_1 7^n\mathbf{v}_1 + c_2 5^n\mathbf{v}_2$$

Siden $7 > 5$, får vi dermed

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B^n\mathbf{x}}{7^n} = c_1\mathbf{v_1} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siden basisen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ er ortogonal, er et lett å finne c_1:

$$c_1 = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2} = 3$$

. Altså er

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B^n\mathbf{x}}{7^n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) For å finne singulærverdiene til A, må vi først finne egenverdiene til

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = B$$

Ifølge punkt a) er egenverdiene til B 7 og 5, så singulærverdiene til A er $\sigma_1 = \sqrt{7}$, $\sigma_2 = \sqrt{5}$. Dette betyr at

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Søylene i V består av en ortogonal basis av egenvektorer for B, og normaliserer vi basisen i a), får vi

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) For å finne søylene i U regner vi først ut $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$. Vi får

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normaliserer vi, får vi de to første søylene i U:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

For å finne den tredje søylen, trenger vi en vektor som står normalt på både $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$. Raskest finner man en slik vektor ved å bruke kryssproduktet, men det er kanskje mer naturlig å bruke at en slik vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ må tilfredsstille ligningene

$$3x + y + 2z = 0 \quad \text{og} \quad -x + 3y = 0$$

En løsning er

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Normaliserer vi denne, får vi den siste søylen i U:

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Vi har nå $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.

Oppgave 3 (I) For å vise at $U \cap V$ er et underrom, må vi vise at det inneholder nullvektoren og er lukket under addisjon og multiplikasjon med skalar:

(i) Siden U og V er underrom, inneholder begge $\mathbf{0}$, og følgelig er $\mathbf{0} \in U \cap V$.

(ii) Hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \cap V$, er $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ med i både U og V. Siden disse er underrom, er dermed også $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ og $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$, men det betyr at $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U \cap V$.

(iii) Hvis $\mathbf{u} \in U \cap V$, er $\mathbf{u}$ med i både U og V. Siden disse er underrom, er dermed også $c\mathbf{u} \in U$ og $c\mathbf{u} \in V$, men det betyr at $c\mathbf{u} \in U \cap V$.

(II) For å vise at $U + V$ er et underrom, må vi vise at det inneholder nullvektoren og er lukket under addisjon og multiplikasjon med skalar:

(i) Siden U og V er underrom, inneholder begge $\mathbf{0}$, og følgelig er $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in U + V$.

(ii) Hvis $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U + V$, er $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ og $\mathbf{y} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$, der $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$ og $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$. Men da er

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{u} + \mathbf{u}') + (\mathbf{v} + \mathbf{v}') \in U + V$$

siden U og V er lukket under addisjon.

(iii) Hvis $\mathbf{x} \in U + V$, er $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, der $\mathbf{u} \in U$ og $\mathbf{v} \in V$. Siden U og V er underrom, er $c\mathbf{u} \in U$ og $c\mathbf{v} \in V$, og dermed er

$$c\mathbf{x} = (c\mathbf{u}) + (c\mathbf{v}) \in U + V$$

For å vise dimensjonsformelen

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

starter vi med en basis $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ for $U \cap V$, og utvider den til basiser $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ og $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ for henholdsvis U og V. Det er nok å vise at $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis for $U + V$. I så fall er nemlig $\dim(U + V) = m + k + n$ og $\dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = (m + k) + (n + k) - k = m + n + k$.

For å vise at $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis for $U + V$ må vi vise at den utspenner hele $U + V$ og er lineært uavhengig.

a) Utspenner hele $U + V$: Hvis $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in U+V$, er $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m + b_1\mathbf{x}_1 \ldots b_k\mathbf{x}_k$ og $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n + d_1\mathbf{x}_1 \ldots k_k\mathbf{x}_k$, så

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m + (b_1+d_1)\mathbf{x}_1 \ldots (b_k+d_k)\mathbf{x}_k + c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_m\mathbf{v}_n$$

b) Lineær uavhengighet: Anta

$$a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m + b_1\mathbf{x}_1 + \ldots + b_k\mathbf{x}_k + c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (1)$$

Vi må vise at alle a-ene, b-ene og c-ene er 0. Legg merke til at dersom alle a-ene er null, må alle b-ene og c-ene også være det, siden vi da står igjen med en lineærkombinasjon av basiselementene i U. Tilsvarende ser vi at hvis alle c-ene er null, så må alle a-ene og b-ene også være det. Det er derfor nok å se på tilfellet der minst én a og minst én c er ikke-null. Bytter vi litt om på (1), får vi

$$-a_1\mathbf{u}_1 - \ldots + -a_m\mathbf{u}_m = b_1\mathbf{x}_1 + \ldots + b_k\mathbf{x}_k + c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_m\mathbf{v}_n$$

Elementet på høyresiden er med i U, mens elementet på venstresiden er med i V, og siden de er like, må de derfor være med i $U \cap V$. Men elementer i $U \cap V$ kan skrives entydig som lineærkombinassjoner av bare $\mathbf{x}$-er. Det betyr at alle c-ene er null, og det antok vi ikke var tilfellet.