UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	9. desember 2015.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig. I oppgavene 1, 2 og 4 betrakter vi alltid det vanlige Euklidske indreproduktet (m.a.o. prikkproduktet).

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La H være nullrommet til A og la W være kolonnerommet til A. La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineæravbildningen gitt ved $T(\mathbf{x}) = \text{Proj}_W(\mathbf{x})$, så $T(\mathbf{x})$ er den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{x}$ ned i W.

1a

Finn en basis for H, og en basis for W. Hva er rangen til A?

Løsning: Ved radoperasjoner finner vi at redusert trappeform R til A er (cf. Matlab-utskriften)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ser at rangen til A er 2, og at de to første kolonnene i A, dvs. $(1, 0, -1)$ og $(0, 1, -1)$, gir en basis for W. Videre er $(1, 1, 1)$ i nullrommet H (som har dimensjon 1) og denne vektoren utgjør da en basis for H. □

1b

Bestem en ortonormal basis for W og finn standardmatrisen til T, dvs. 3×3 matrisen P som er slik at $T(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Løsning: Bruker Gram-Schmidt med normalisering på $(1, 0, -1)$ og $(0, 1, -1)$ og får at $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ og $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$ danner en

(Fortsettes på side 2.)

ortonormal basis for W. Med $U = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2]$ vet vi at $\mathrm{Proj}_W(\mathbf{x}) = UU^T\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Dette betyr at $P = UU^T$ angir standardmatrisen til T. Utregning av UU^T gir at

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alternativt kan man regne ut $T(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{2}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}_j)\,\mathbf{u}_j$ for $i = 1, 2, 3$ og bruke at $P = \big[T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ T(\mathbf{e}_3)\big]$. □

1c

La $\mathbf{b} = (4, 5, 0)$. Beregn $\mathrm{Proj}_W(\mathbf{b})$. Finn deretter *alle* minste kvadraters løsninger av systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Løsning: Ved 1b får vi at

$$\mathrm{Proj}_W(\mathbf{b}) = P\,\mathbf{b} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = (1, 2, -3)\,.$$

Alternativt har vi at

$$\mathrm{Proj}_W(\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{4}{2}(1, 0, -1) + \frac{6}{6}(-1, 2, -1) = (1, 2, -3)$$

Minste kvadraters løsninger av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er løsningene av $A\mathbf{x} = \mathrm{Proj}_W(\mathbf{b})$. Ved radreduksjon finner vi at $x_1 = 1 + x_3, x_2 = 2 + x_3$ og x_3 er fri. Dermed er alle minste kvadraters løsninger av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved $\widehat{\mathbf{x}} = (1 + t, 2 + t, t)$, der $t \in \mathbb{R}$. Alternativt kan man løse normallikningene $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ for å finne disse løsningene. □

Oppgave 2

Betrakt igjen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2a

Finn egenverdiene til A, og angi en tilhørende egenvektor for hver av disse.

Løsning: Matlab-utskriften gir at det karakteristiske polynomet til A er

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)\,,$$

så egenverdiene til A er 0, 1 og 3. Har allerede funnet en egenvektor tilhørende 0 (dvs en som ligger i $\mathrm{Nul}\ A$), nemlig $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$. For egenverdien 1 løser vi $A\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$, og finner at en egenvektor er $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0)$. For egenverdien 3 løser vi $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$, og finner at $\mathbf{v}_3 = (1, 1, -2)$ er en egenvektor. □

(Fortsettes på side 3.)

2b

Begrunn (uten regning) at A er ortogonalt diagonaliserbar. Bestem deretter en ortogonal matrise U og en diagonal matrise D som gir en ortogonal diagonalisering av A.

Løsning: A er symmetrisk og dermed ortogonalt diagonaliserbar. En ortogonal diagonalisering av A er å la U være matrisen med normaliserte egenvektorer som sine kolonner (som automatiskt er ortogonale på hverandre), dvs

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

og la D være diagonal matrisen med de tilhørende egenverdiene, dvs

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Da er U ortogonal og $A = UDU^T = UDU^{-1}$. □

2c

Betrakt den kvadratiske formen

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3^2 - 2\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3$$

der $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Begrunn at 0 er den minste verdien som $Q(\mathbf{x})$ antar når $\mathbf{x}$ varierer gjennom $\mathbb{R}^3$.

Løsning: Har at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Fra punkt 2a vet vi at egenverdiene til A er 0, 1 og 3, alle ikkenegative, så A er positivt semidefinitt. Da er Q positivt semidefinitt, dvs $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Siden $Q(\mathbf{0}) = 0$ følger påstanden som skulle begrunnes. □

Oppgave 3

La $\mathbb{P}_2$ betegne vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad mindre enn eller lik 2 i en reell variabel t. La $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ være standardbasisen for $\mathbb{P}_2$, dvs $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ og $p_2(t) = t^2$.

Definer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_2$ ved

$$q_1(t) = 1 + t\,,\; q_2(t) = 1 - t,\; q_3(t) = t + t^2\,.$$

3a

Begrunn at $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$. Beregn deretter koordinatvektoren $[q]_{\mathcal{C}}$ når $q(t) = 1 + t + 2\,t^2$.

Løsning: Kan løses direkte uten problemer, men vi observerer at den reduserte trappeformen til matrisen

$$N = \begin{bmatrix} [q_1]_{\mathcal{B}} & [q_2]_{\mathcal{B}} & [q_3]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Fortsettes på side 4.)

er identitetsmatrisen, jf. Matlab utskriften. Så N er invertibel og Notat 1 gir at $\{q_1, q_2, q_3\}$ en basis for $\mathbb{P}_2$. Da er $N = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ og $N^{-1} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Matlab-utskriften angir også N^{-1} og vi får da at

$$[q]_{\mathcal{C}} = N^{-1}\,[q]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (0, 1, 2)\,.$$

□

Definer en lineæravbildning $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ ved at et polynom $p \in \mathbb{P}_2$ gitt ved $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ avbildes over i $T(p)$, der

$$\big(T(p)\big)(t) = (2c_1 - 2c_2) + (2c_0 + 3c_2)\,t + 3c_2\,t^2.$$

3b

Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ for T relativt til $\mathcal{B}$. Finn også matrisen $[T]_{\mathcal{C}}$ for T relativt til $\mathcal{C}$.

Løsning: Har

$$\begin{aligned}
\big(T(p_0)\big)(t) &= (2\cdot 0 - 2\cdot 0) + (2\cdot 1 + 3\cdot 0)\,t + (3\cdot 0)\,t^2 = \ 2t\,, \\
\big(T(p_1)\big)(t) &= (2\cdot 1 - 2\cdot 0) + (2\cdot 0 + 3\cdot 0)\,t + (3\cdot 0)\,t^2 = \ 2\,, \\
\big(T(p_2)\big)(t) &= (2\cdot 0 - 2\cdot 1) + (2\cdot 0 + 3\cdot 1)\,t + (3\cdot 1)\,t^2 = -2 + 3t + 3t^2\,.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \Big[\,[T(p_0)]_{\mathcal{B}}\ [T(p_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(p_2)]_{\mathcal{B}}\,\Big] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Videre er

$$\begin{aligned}
\big(T(q_1)\big)(t) &= (2\cdot 1 - 2\cdot 0) + (2\cdot 1 + 3\cdot 0)\,t + (3\cdot 0)\,t^2 = \ 2 + 2t = \ 2\,q_1(t)\,, \\
\big(T(q_2)\big)(t) &= (2(-1) - 2\cdot 0) + (2\cdot 1 + 3\cdot 0)\,t + (3\cdot 0)\,t^2 = -2 + 2t = -2\,q_2(t)\,, \\
\big(T(q_3)\big)(t) &= (2\cdot 1 - 2\cdot 1) + (2\cdot 0 + 3\cdot 1)\,t + (3\cdot 1)\,t^2 = 3t + 3t^2 = \ 3\,q_3(t)\,.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$[T]_{\mathcal{C}} = \Big[\,[T(q_1)]_{\mathcal{C}}\ [T(q_2)]_{\mathcal{C}}\ [T(q_3)]_{\mathcal{C}}\,\Big] = \Big[\,[2q_1]_{\mathcal{C}}\ [-2q_2]_{\mathcal{C}}\ [3q_3]_{\mathcal{C}}\,\Big] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Alternativt kan man bruke at $[T]_{\mathcal{C}} = N^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}}\,N$. □

3c

Begrunn at T er en isomorfi og beregn koordinatvektoren $\big[T^{-1}(q)\big]_{\mathcal{C}}$ når $q(t) = 1 + t + 2\,t^2$.

Løsning: Siden matrisen $[T]_{\mathcal{C}}$ er invertibel (determinanten er -12), vet vi fra Notat 2 at da er T en isomorfi. Videre får vi (ved Notat 2 og 3a) at

$$\begin{aligned}
\big[T^{-1}(q)\big]_{\mathcal{C}} = [T^{-1}]_{\mathcal{C}}\,[q]_{\mathcal{C}} = \big([T]_{\mathcal{C}}\big)^{-1}\,[q]_{\mathcal{C}} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= (0, -1/2, 2/3)\,.
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 4

La $n \in \mathbb{N}$ og la P være en symmetrisk $n \times n$ matrise som oppfyller at $P^2 = P$. La W være kolonnerommet til P. La $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ og sett $\mathbf{z} = \mathbf{y} - P\mathbf{y}$.

Vis at $\mathbf{z} \in W^\perp$, dvs. at $\mathbf{z}$ er ortogonal på W. Begrunn deretter at $\text{Proj}_W(\mathbf{y}) = P\mathbf{y}$, der $\text{Proj}_W(\mathbf{y})$ betegner den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ ned i W.

Løsning: Egenskapene til P gir at

$$P^T\mathbf{z} = P(\mathbf{y} - P\mathbf{y}) = P\mathbf{y} - P^2\mathbf{y} = P\mathbf{y} - P\mathbf{y} = \mathbf{0}\,,$$

så $\mathbf{z} \in \text{Nul } P^T$. *Siden* $W^\perp = (\text{Col}\, P)^\perp = \text{Nul } P^T$, *er* $\mathbf{z} \in W^\perp$.

Alternativt, betrakt $\mathbf{b} \in W$. *Siden* $W = \text{Col}\, P = \{P\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, *kan vi skrive* $\mathbf{b} = P\mathbf{x}$ *for en* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Da er*

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{z} = \big(P\mathbf{x}\big)^T (\mathbf{y} - P\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T P^T\mathbf{y} - \mathbf{x}^T P^T P\mathbf{y}\,.$$

Siden $P^T = P$ *og* $P^T P = PP = P^2 = P$, *får vi at*

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x}^T P\mathbf{y} - \mathbf{x}^T P\mathbf{y} = 0\,.$$

Dette viser at $\mathbf{z} \in W^\perp$.

Sett nå $\mathbf{y}' = P\mathbf{y}$. *Da er*

$$\mathbf{y} = P\mathbf{y} + (\mathbf{y} - P\mathbf{y}) = \mathbf{y}' + \mathbf{z}$$

der $\mathbf{y}' \in W$ *og* $\mathbf{z} \in W^\perp$. *Entydigheten av en slik ortogonal dekomposisjon gir at* $\mathbf{y}' = \text{Proj}_W(\mathbf{y})$, *dvs.* $P\mathbf{y} = \text{Proj}_W(\mathbf{y})$, *som ønsket.*

□

(Fortsettes på side 6.)

Matlab-utskrift:

```
>> A= [1 0 -1; 0 1 -1; -1 -1 2];
>> rref(A)

ans =

     1     0     -1
     0     1     -1
     0     0      0

>> poly(A)

ans =
      1    -4     3     0


>> N= [1 1 0; 1 -1 1; 0 0 1];
>> rref(N)

ans =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

 >> inv(N)

ans =

     1/2      1/2     -1/2
     1/2     -1/2      1/2
      0        0        1
```