UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Mandag 5 desember 2016
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig. I dette oppgavesettet betrakter vi alltid det vanlige Euklidske indreproduktet (m.a.o. prikkproduktet) og vanlig Euklidsk norm.

Oppgave 1

La A være 3×2 matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La $W = \text{Col}\, A$ være kolonnerommet til A.

1a

Begrunn at $\mathbf{b} = (-2, -1, 0)$ er i W. Finn deretter en ortonormal basis $\mathcal{B}$ for W.

1b

Sett $\mathbf{y} = (-1, -3, 1)$. Beregn den ortogonale projeksjonen $\widehat{\mathbf{y}} = \text{Proj}_W(\mathbf{y})$ av $\mathbf{y}$ ned i W. Finn deretter minste kvadraters løsning $\widehat{\mathbf{x}}$ av systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$, og angi den tilhørende minste kvadraters feilen, dvs avstanden fra $\mathbf{y}$ til W.

1c

Finn en QR-faktorisering av A. Finn også standardmatrisen B til den lineære avbildingen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $T(\mathbf{x}) = \text{Proj}_W(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(Fortsettes på side 2.)

1d

La $J : W \to \mathbb{R}^3$ være den lineære avbildningen gitt ved $J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ for $\mathbf{w} \in W$ og la $S : \mathbb{R}^2 \to W$ være den lineære avbildningen gitt ved $S(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. La $\mathcal{B}$ være basisen for W du fant i 1a, la $\mathcal{C}$ betegne standardbasisen for $\mathbb{R}^3$ og la $\mathcal{C}'$ betegne standardbasisen for $\mathbb{R}^2$.

Beregn matrisen M til J relativt til $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$, og matrisen N til S relativt til $\mathcal{C}'$ og $\mathcal{B}$.

Oppgave 2

La A være 3×3 matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 7/2 & -2 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Du får oppgitt at A har en egenverdi $\lambda_2 = 1$, og at $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ og $\mathbf{v}_3 = (1, 3, 6)$ er egenvektorer for A.

2a

Finn en egenvektor $\mathbf{v}_2$ for A tilhørende egenverdien λ_2. Bestem også egenverdiene for A som svarer til egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_3$.

2b

Begrunn at A er diagonaliserbar og angi en 3×3 invertibel matrise P og en 3×3 diagonalmatrise D som er slik at $A = PDP^{-1}$.

2c

Betrakt det dynamiske systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ der $k = 0, 1, 2, \ldots$ Anta at $\mathbf{x}_0 = (1, 0, -3)$. Begrunn at $\mathbf{x}_k$ konvergerer mot en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ når $k \to \infty$ og angi $\mathbf{x}$.

2d

Betrakt igjen det dynamiske systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ der $k = 0, 1, 2, \ldots$ Bestem *alle* startvektorene $\mathbf{x}_0$ som er slik at $\mathbf{x}_k$ vil konvergere mot nullvektoren når $k \to \infty$. Begrunn svaret.

Oppgave 3

La $\mathbb{P}_2$ betegne vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad høyst 2 i en reell variabel t. Definer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_2$ ved

$$q_1(t) = 1 + t + t^2\,, \quad q_2(t) = 1 + 2t + 3t^2\,, \quad q_3(t) = 1 + 3\,t + 6\,t^2\,,$$

(Fortsettes på side 3.)

og sett $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$.

Begrunn at $\mathcal{C}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$. Beregn deretter koordinatvektoren $[p]_{\mathcal{C}}$ når $p(t) = 1 - 3t^2$.

Oppgave 4

La A være en symmetrisk $n \times n$ reell matrise og la $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ betegne egenverdiene til A, gjentatt i henhold til deres multiplisitet.

Matrisen A er da ortogonalt diagonaliserbar; forklar hva dette betyr. Hva blir de singulære verdiene til A? Begrunn svaret.

Lykke til!

(Fortsettes på side 4.)

Matlab-utskrift.

```
>>E

E =

       5/2            -2              1/2
       3/2             0             -1/2
       0               3             -2

>> rref(E)

ans =

       1               0             -1/3
       0               1             -2/3
       0               0              0

>> C

C =

     3    -3     1     1     0     0
    -3     5    -2     0     1     0
     1    -2     1     0     0     1

>> rref(C)

ans =

     1     0     0     1     1     1
     0     1     0     1     2     3
     0     0     1     1     3     6
```