# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | MAT 1120 — Lineær algebra |
| Eksamensdag: | Mandag 5 desember 2016 |
| Tid for eksamen: | 09.00 – 13.00 |
| Oppgavesettet er på 6 sider. | |
| Vedlegg: | En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet. |
| Tillatte hjelpemidler: | Ingen. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

*Merk: Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig. I dette oppgavesettet betrakter vi alltid det vanlige Euklidske indreproduktet (m.a.o. prikkproduktet) og vanlig Euklidsk norm.*

# Oppgave 1

La $A$ være $3 \times 2$ matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La $W = \text{Col } A$ være kolonnerommet til $A$.

### 1a

Begrunn at $\mathbf{b} = (-2, -1, 0)$ er i $W$. Finn deretter en ortonormal basis $\mathcal{B}$ for $W$.

*Løsning: Vi løser $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og finner at $\mathbf{x} = (-3, 1)$ er en løsning. Siden $W = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}\}$, ser vi at $\mathbf{b} \in W$. (Alternativt viser dette at $\mathbf{b} = (-3)\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ der $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ er første og andre kolonne i $A$, og derfor at $\mathbf{b} \in Col\, A = W$.)*

*Kolonnene i $A$ er ikke et multiplum av hverandre, så de er lineært uavhengige. Bruker Gram-Schmidt ortogonaliseringsprosess på disse: det gir $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)$, og*

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3) - \frac{6}{3}(1, 1, 1) = (-1, 0, 1).$$

*Så $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en ortogonal basis for $W$. Ved å normalisere $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ får vi $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{3})\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$ og $\mathbf{u}_2 = (1/\sqrt{2})\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2})(-1, 0, 1)$, som gir en ortonormal basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ for $W$.* □

*(Fortsettes på side 2.)*

## 1b

Sett $\mathbf{y} = (-1, -3, 1)$. Beregn den ortogonale projeksjonen $\widehat{\mathbf{y}} = \text{Proj}_W(\mathbf{y})$ av $\mathbf{y}$ ned i $W$. Finn deretter minste kvadraters løsning $\widehat{\mathbf{x}}$ av systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$, og angi den tilhørende minste kvadraters feilen, dvs avstanden fra $\mathbf{y}$ til $W$.

*Løsning: Siden $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en ortonormal basis for $W$ er $\widehat{\mathbf{y}}$ gitt ved*

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{y}} &= (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 \\ &= \frac{-3}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) + \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \\ &= (-2,-1,0)\,.\end{aligned}$$

*Minste kvadraters løsning $\widehat{\mathbf{x}}$ av systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ kan vi finne ved å løse systemet $A\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{y}}$, som har (entydig) løsning $\widehat{\mathbf{x}} = (-3, 1)$ (jf. punkt 1a).*

*Alternativt kan vi bestemme $\widehat{\mathbf{x}}$ ved å løse normallikningene $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$. Disse blir $3x_1 + 6_2 = -3$, $6x_1 + 14x_2 = -4$, som har (entydig) løsning $\widehat{\mathbf{x}} = (-3, 1)$.*

*Avstanden fra $\mathbf{y}$ til $W$ er*

$$\|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}\| = \|(-1,-3,1) - (-2,-1,0)\| = \|(1,-2,1)\| = \sqrt{6}\,.$$

□

## 1c

Finn en QR-faktorisering av $A$. Finn også standardmatrisen $B$ til den lineære avbildingen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $T(\mathbf{x}) = \text{Proj}_W(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

*Løsning: Vi lar $Q$ være matrisen med kolonner $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ som vi beregnet i punkt 1a:*

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

*Fra beregningene i 1a får vi at $\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_1 = \sqrt{3}\,\mathbf{u}_1$, og*

$$\mathbf{a}_2 = 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 2\sqrt{3}\,\mathbf{u}_1 + \sqrt{2}\,\mathbf{u}_2,$$

*så $A = QR$ der*

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

*Siden $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u}_2\}$ er en ortonormal basis for $W$ og $Q = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2]$, vet vi at $B = QQ^T$. Utregning gir*

$$B = QQ^T = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{bmatrix}.$$

□

*(Fortsettes på side 3.)*

### 1d

La $J : W \to \mathbb{R}^3$ være den lineære avbildningen gitt ved $J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ for $\mathbf{w} \in W$ og la $S : \mathbb{R}^2 \to W$ være den lineære avbildningen gitt ved $S(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. La $\mathcal{B}$ være basisen for $W$ du fant i 1a, la $\mathcal{C}$ betegne standardbasisen for $\mathbb{R}^3$ og la $\mathcal{C}'$ betegne standardbasisen for $\mathbb{R}^2$.

Beregn matrisen $M$ til $J$ relativt til $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$, og matrisen $N$ til $S$ relativt til $\mathcal{C}'$ og $\mathcal{B}$.

*Løsning: Vi får at*

$$M = \Big[\, [J(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{C}} \; [J(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{C}} \,\Big] = \big[\mathbf{u}_1 \; \mathbf{u}_2\big] = Q,$$

*og*

$$\begin{aligned} N &= \Big[\, [S(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{B}} \; [S(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{B}} \,\Big] = \Big[\, [A\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} \; [A\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}} \,\Big] \\ &= \Big[\, [\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}} \; [\mathbf{a}_2]_{\mathcal{B}} \,\Big] = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = R \end{aligned}$$

*siden* $\mathbf{a}_1 = \sqrt{3}\,\mathbf{u}_1$ *og* $\mathbf{a}_2 = 2\sqrt{3}\,\mathbf{u}_1 + \sqrt{2}\,\mathbf{u}_2$.

□

## Oppgave 2

La $A$ være $3 \times 3$ matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 7/2 & -2 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Du får oppgitt at $A$ har en egenverdi $\lambda_2 = 1$, og at $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ og $\mathbf{v}_3 = (1, 3, 6)$ er egenvektorer for $A$.

### 2a

Finn en egenvektor $\mathbf{v}_2$ for $A$ tilhørende egenverdien $\lambda_2$. Bestem også egenverdiene for $A$ som svarer til egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_3$.

*Løsning: For egenverdien* $\lambda_2 = 1$ *løser vi systemet* $(A - I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. *Matlab-utskriften angir redusert trappeform for matrisen* $A - I$ *og vi finner at en egenvektor tilhørende* $\lambda_2 = 1$ *er f.eks.* $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 3)$. *For egenvektoren* $\mathbf{v}_1$ *finner vi at* $A\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$, *så* $\lambda_1 = 2$ *er tilhørende egenverdi. For egenvektoren* $\mathbf{v}_3$ *finner vi at* $A\mathbf{v}_3 = (1/2)\mathbf{v}_3$, *så* $\lambda_3 = 1/2$ *er tilhørende egenverdi.* □

*(Fortsettes på side 4.)*

## 2b

Begrunn at $A$ er diagonaliserbar og angi en $3 \times 3$ invertibel matrise $P$ og en $3 \times 3$ diagonalmatrise $D$ som er slik at $A = PDP^{-1}$.

*Løsning: $A$ er en $3 \times 3$ matrise med tre distinkte egenverdier, og vi vet at da er $A$ diagonaliserbar. Vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$ er da lineært uavhengig, så de danner en basis for $\mathbb{R}^3$. Lar vi $D$ være diagonalmatrisen med diagonalelementer 2, 1 og 1/2, og $P$ være matrisen med kolonner $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$, så er $P$ invertibel og vi har at $A = PDP^{-1}$.*

□

## 2c

Betrakt det dynamiske systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ der $k = 0, 1, 2, \ldots$ Anta at $\mathbf{x}_0 = (1, 0, -3)$. Begrunn at $\mathbf{x}_k$ konvergerer mot en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ når $k \to \infty$ og angi $\mathbf{x}$.

*Løsning: Fra Matlab-utskriften ser vi at*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

*og det gir at $P^{-1}\mathbf{x}_0 = (0, 3, -2)$, så $\mathbf{x}_0 = P(0, 3, -2) = 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$. Dermed får vi at*

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = 3\,\mathbf{v}_2 - 2 \cdot 2^{-k}\,\mathbf{v}_3 \to 3\,\mathbf{v}_2 = (3, 6, 9)$$

*når $k \to \infty$ (siden $2^{-k} \to 0$).*

□

## 2d

Betrakt igjen det dynamiske systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ der $k = 0, 1, 2, \ldots$ Bestem *alle* startvektorene $\mathbf{x}_0$ som er slik at $\mathbf{x}_k$ vil konvergere mot nullvektoren når $k \to \infty$. Begrunn svaret.

*Løsning: Anta at $\mathbf{x}_0 = P(c_1, c_2, c_3) = c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + c_3\,\mathbf{v}_3$ for $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Da er*

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = c_1 \cdot 2^k\,\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + (1/2)^k c_3\mathbf{v}_3$$

*Eneste mulighet for at $\mathbf{x}_k$ går mot nullvektoren er at $c_1 = c_2 = 0$. For hvis $c_1 \neq 0$ vil $\|\mathbf{x}_k\|$ gå mot uendelig når $k \to \infty$. Dermed må $c_1 = 0$. Videre, hvis vi så har at $c_2 \neq 0$, vil $\mathbf{x}_k \to c_2\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$. Så da må også $c_2 = 0$.*

*Dette betyr at startvektoren må være på formen $\mathbf{x}_0 = c_3\mathbf{v}_3$, dvs. et multiplum av $(1, 3, 6)$. Og for enhver slik startvektor vil systemet da konvergere mot nullvektoren, fordi $(1/2)^k \to 0$. Svaret er altså alle startvektorer $\mathbf{x}_0$ som ligger i Span$\{(1, 3, 6)\}$.* □

*(Fortsettes på side 5.)*

# Oppgave 3

La $\mathbb{P}_2$ betegne vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad høyst 2 i en reell variabel $t$. Definer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_2$ ved

$$q_1(t) = 1 + t + t^2\,, \quad q_2(t) = 1 + 2t + 3t^2\,, \quad q_3(t) = 1 + 3\,t + 6\,t^2\,,$$

og sett $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$. Begrunn at $\mathcal{C}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$. Beregn deretter koordinatvektoren $[p]_{\mathcal{C}}$ når $p(t) = 1 - 3t^2$.

*Løsning: La $\mathcal{B}$ være standardbasisen for $\mathbb{P}_2$. Vi har da at*

$$\Big[\; [q_1]_{\mathcal{B}}\; [q_2]_{\mathcal{B}}\, [q_3]_{\mathcal{B}}\;\Big] = P$$

*der $P$ er matrisen vi fant i 2b. Siden $P$ er invertibel, får vi fra Notat 1 at $\mathcal{C}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$.*

*Videre er $[p]_{\mathcal{B}} = (1, 0, -3)$ og*

$$[p]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,[p]_{\mathcal{B}} = \big(P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\big)^{-1}\,[p]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\,[p]_{\mathcal{B}}\,,$$

*så vi finner at $[p]_{\mathcal{C}} = (0, 3, -2)$ ved den tilsvarende utregningen som i 2c.*

□

# Oppgave 4

La $A$ være en symmetrisk $n \times n$ reell matrise og la $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ betegne egenverdiene til $A$, gjentatt i henhold til deres multiplisitet.

Matrisen $A$ er da ortogonalt diagonaliserbar; forklar hva dette betyr. Hva blir de singulære verdiene til $A$? Begrunn svaret.

*Løsning: At $A$ er ortogonalt diagonaliserbar betyr at $A = UDU^T$ der $U$ er en $n \times n$ reell matrise som er ortogonal (dvs at $U$ er invertibel med $U^{-1} = U^T$, som er ekvivalent med at $U$ har ortonormale kolonner) og $D$ er en $n \times n$ reell diagonalmatrise.*

*Koeffisientene til $D$ langs diagonalen er da alle $\lambda_j$-ene, ordnet i en passende rekkefølge (i samsvar med kolonnene til $U$ som er tilhørende egenvektorer). Siden $A^TA = A^2 = UD^2U^T$ ser vi at egenverdiene til $A^TA = A^2$ blir $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$. Men da er de singulære verdiene til $A$ kvadratroten av disse, altså $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|$.*

□

*Lykke til!*

*(Fortsettes på side 6.)*

**Matlab-utskrift.**

```
>>E

E =

       5/2           -2            1/2
       3/2            0           -1/2
       0              3           -2

>> rref(E)

ans =

       1              0           -1/3
       0              1           -2/3
       0              0            0

>> C

C =

     3    -3     1     1     0     0
    -3     5    -2     0     1     0
     1    -2     1     0     0     1

>> rref(C)

ans =

     1     0     0     1     1     1
     0     1     0     1     2     3
     0     0     1     1     3     6
```