

Løsningsforslag til enkelte eksempeleksamensoppgaver i MAT1125

Ulrik Skre Fjordholm

7. desember 2025

Løsning på oppgave 1.

(a) U er definert som spennet av funksjonene $\cos$ og $\sin$, som begge ligger i det komplekse vektorrommet $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Altså er U et underrom, og er derfor i seg selv et vektorrom.

Alternativ løsning: U er definert som alle (komplekse) lineærkombinasjoner av funksjonene $\cos$ og $\sin$. Dermed vil også summen av elementer i U , og skalarmultipler av elementer i U , ligge i U . Nullelementet er nullfunksjonen, og den negative inversen av $f = \alpha \cos + \beta \sin$ er $-f := -\alpha \cos - \beta \sin$. De andre vektorromaksiomene følger som for alle andre funksjonsrom vi har sett.

(b) Siden U er definert som spennet av $\cos$ og $\sin$, vil listen $(\cos, \sin)$ utspenne U . For å se at disse er lineært uavhengige, lar vi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ være slik at $f := \alpha \cos + \beta \sin = 0$. Da er

$$0 = f(0) = \alpha \cos(0) + \beta \sin(0) = \alpha,$$

så $\alpha = 0$, og

$$0 = f(\pi/2) = \beta \sin(\pi/2) = \beta,$$

så $\beta = 0$. Altså er listen lineært uavhengig, og er dermed en basis for U .

(c) Basisen i forrige deloppgave har to elementer, så U har dimensjon 2.

Løsning på oppgave 2.

(a) Bildet til T er mengden

$$\text{im } T := \{Tx : x \in \mathbb{R}^3\}$$

og kjernen til T er mengden

$$\ker T := \{x \in \mathbb{R}^3 : Tx = 0\}.$$

(b) La $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^4$ være kolonnene i matrisen. Da er

$$T(x) = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3,$$

altså en lineærkombinasjon av $\{u_1, u_2, u_3\}$. Vi observerer at vi kan skrive $u_3 = u_1 - u_2$, slik at

$$T(x) = (x_1 + x_3)u_1 + (x_2 - x_3)u_2.$$

Altså er $T(x) \in \text{span}(\{u_1, u_2\})$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$, slik at $\text{im } T \subseteq \text{span}(\{u_1, u_2\})$. Motsatt er $\text{im } T = \text{span}(\{u_1, u_2, u_3\}) \supseteq \text{span}(\{u_1, u_2\})$. Altså er det likhet mellom mengdene: $\text{im } T = \text{span}(\{u_1, u_2\})$. Dette beviser utsagnet.

(c) Vi ser at kolonnene u_1, u_2 er lineært uavhengige, for om $x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0$ sier andre komponent at $-x_2 = 0$, og tredje komponent sier at $x_1 = 0$. Altså er $\{u_1, u_2\}$ en basis for $\text{span}(\{u_1, u_2\}) = \text{im } T$, slik at $\dim \text{im } T = 2$. Av dimensjonssatsen får vi da

$$\dim \ker T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{im } T = 3 - 2 = 1.$$

Løsning på oppgave 3.

(a) La U være et vektorrom over en kropp $\mathbb{K}$ og la $u_1, \dots, u_n \in U$. Listen av vektorer $\{u_1, \dots, u_n\}$ er *lineært uavhengig* om følgende implikasjon er sann:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ og } \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = 0 \quad \implies \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0.$$

(b) La U være et indreproduktrom over $\mathbb{K}$ og la $u_1, \dots, u_n \in U$. Listen $\{u_1, \dots, u_n\}$ er *ortogonal* dersom ingen av vektorene er lik nullvektoren, og om $\langle u_j, u_k \rangle = 0$ for alle $j, k = 1, \dots, n, j \neq k$.

Listen er *ortonormal* om den er ortogonal, og om $\|u_k\| = 1$ for $k = 1, \dots, n$ (der $\|\cdot\|$ er normen indusert av indreproduktet). En annen måte å si dette på er at $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk}$ for $j, k = 1, \dots, n$.

(c) La $\{u_1, \dots, u_n\}$ være en ortogonal liste, og anta at $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ er slik at

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = 0.$$

Ta indreproduktet mellom denne ligningen og vektoren u_j :

$$0 = \langle \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k, u_j \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{=0 \text{ for } k \neq j} = \alpha_j \langle u_j, u_j \rangle = \alpha_j \|u_j\|^2.$$

Siden listen er ortogonal er $u_j \neq 0$, så vi kan dele på $\|u_j\|^2$ på begge sider og få $\alpha_j = 0$. Siden argumentet gjelder for alle j , får vi at $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$, slik at listen er lineært uavhengig.

Det samme er sant for ortonormale lister, fordi alle ortonormale lister også er ortogonale, slik at vi kan anvende det vi nettopp har bevist.

Løsning på oppgave 5.

(a) En følge $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^n$ konvergerer mot $x \in \mathbb{R}^n$ med hensyn på $\|\cdot\|_1$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$\|x_j - x\|_1 < \varepsilon \quad \text{når} \quad j \geq N.$$

(b) Siden $\mathbb{R}^n$ er endeligdimensjonalt, er alle normer på $\mathbb{R}^n$ ekvivalente, så $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_{\max}$ er ekvivalente. Dermed vil konvergens med hensyn på $\|\cdot\|_1$ implisere konvergens med hensyn på $\|\cdot\|_{\max}$.

Alternativ løsning: La $x_1, x_2, \dots$ være en følge i $\mathbb{R}^n$ som konvergerer mot x . La $\varepsilon > 0$ og la $N \in \mathbb{N}$ være slik at

$$\|x_j - x\|_1 < \varepsilon \quad \text{når} \quad j \geq N.$$

Vi har $\|y\|_1 := \sum_{k=1}^n |(y)_k|$ for alle $y \in \mathbb{R}^n$, så $(y)_\ell \leq \sum_{k=1}^n |(y)_k| = \|y\|_1$ for alle $\ell = 1, \dots, n$. Dermed er

$$|(x_j - x)_\ell| \leq \|x_j - x\|_1 < \varepsilon$$

for alle $\ell = 1, \dots, n$ når $j \geq N$. Dermed vil også

$$\|x_j - x\|_{\max} = \max_{\ell=1, \dots, n} |(x_j - x)_\ell| < \varepsilon$$

når $j \geq N$. Altså konvergerer følgen mot x også i $\|\cdot\|_{\max}$ -normen.

Løsning på oppgave 6.

(a) Vi må vise fire betingelser:

Veldefinert: Vi påstår at $\|f\|_{\sup}$ er et endelig tall for alle $f \in U$. Siden f er en kontinuerlig funksjon på et lukket, begrenset intervall, har den et maksimum og et minimum: Det finnes $t_1, t_2 \in [0, 1]$ slik at

$$f(t_1) \leq f(t) \leq f(t_2) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Dermed vil $\|f\|_{\sup} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = \max(|f(t_1)|, |f(t_2)|)$, som er et endelig tall.

Positivitet: Vi må vise at $\|f\|_{\sup} \geq 0$ for alle f , og at $\|f\|_{\sup} = 0$ kun når $f = 0$. Det første er opplagt, siden $\|f\|_{\sup}$ er definert som supremum av en mengde ikke-negative tall. Dersom $\|f\|_{\sup} := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = 0$, er $|f(t)| \leq 0$ for alle $t \in [0, 1]$, som er det samme som å si at $f(t) = 0$ for alle $t \in [0, 1]$. Altså er $f = 0$.

Homogenitet: Vi må vise at $\|\alpha f\|_{\sup} = |\alpha| \|f\|_{\sup}$ for alle skalarer α . Vi har

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{\sup} &= \sup_{t \in [0, 1]} |\alpha f(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} (|\alpha| |f(t)|) \\ &= |\alpha| \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = |\alpha| \|f\|_{\sup}. \end{aligned}$$

Trekantulikheten: Vi må vise at $\|f + g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}$ for alle $f, g \in U$. Vi har

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\sup} &= \sup_{t \in [0, 1]} |(f + g)(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) + g(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1]} (|f(t)| + |g(t)|) \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0, 1]} |g(t)| \\ &= \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}. \end{aligned}$$

(b) Om $f \in U$, er $2f$ funksjonen $t \mapsto 2f(t)$. Siden multipler av kontinuerlige funksjoner også er kontinuerlig, vil også $2f \in U$. Altså er T veldefinert.

T er lineær, for om $f, g \in U$ og $\alpha \in \mathbb{R}$, er

$$T(f + g) = 2(f + g) = 2f + 2g = Tf + Tg$$

og

$$T(\alpha f) = 2(\alpha f) = \alpha(2f) = \alpha Tf.$$

En lineær avbildning T er kontinuertlig hvis og bare hvis den er begrenset, det vil si det finnes en konstant $C > 0$ slik at $\|Tf\|_{\text{sup}} \leq C\|f\|_{\text{sup}}$ for alle $f \in U$. Vi har

$$\|Tf\|_{\text{sup}} = \|2f\|_{\text{sup}} = 2\|f\|_{\text{sup}},$$

så vi kan velge konstanten $C = 2$.

Alternativ løsning: La $f \in U$ og la $\varepsilon > 0$. For en vilkårlig $g \in U$ er da

$$\|Tf - Tg\|_{\text{sup}} = \|2f - 2g\|_{\text{sup}} = 2\|f - g\|_{\text{sup}}.$$

Dersom $\|f - g\|_{\text{sup}} < \delta := \varepsilon/2$, er da $\|Tf - Tg\|_{\text{sup}} < \varepsilon$. Altså er T kontinuertlig.

Løsning på oppgave 7.

(a) Ethvert polynom er deriverbart, og den deriverte av et polynom av grad høyst 3, er et polynom av grad høyst 2. Altså er $Tp \in \mathcal{P}_2$ for alle $p \in \mathcal{P}_3$, så T er veldefinert.

Om $p, q \in \mathcal{P}_3$ og $\alpha \in \mathbb{R}$, er

$$T(p + q) = \frac{d(p + q)}{dt} = \frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} = Tp + Tq$$

og

$$T(\alpha p) = \frac{d(\alpha p)}{dt} = \alpha \frac{dp}{dt} = \alpha Tp.$$

Altså er T lineær.

(b) T er ikke injektiv, for det finnes ulike $p, q \in \mathcal{P}_3$ slik at $Tp = Tq$. Da for eksempel $p(t) = 1$ for alle t og $q(t) = 2$ for alle t . Da er $Tp = Tq = 0$.

(c) T er surjektiv: La $q \in \mathcal{P}_2$, og la $p(t) := \int_0^t q(s) ds$. Da er $p \in \mathcal{P}_3$, og av Kalkulus' Fundamentalteorem (eller Analysens Fundamentalteorem) er $\frac{dp}{dt} = q$. Altså finnes en $p \in \mathcal{P}_3$ slik at $Tp = q$.

(d) La $p_0(t) = 1$ for alle t og $p_k(t) = t^k$ for alle t for $k = 1, \dots, 3$. Vi har $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = ([Tp_0]_{\mathcal{B}} \quad [Tp_1]_{\mathcal{B}} \quad [Tp_2]_{\mathcal{B}} \quad [Tp_3]_{\mathcal{B}})$. Bildet av basispolynomene er

$$Tp_0 = 0, \quad Tp_k = kp^{k-1} \quad \text{for } k = 1, \dots, 3,$$

slik at

$$[Tp_0]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [Tp_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [Tp_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [Tp_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi får derfor

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}.$$

(e) Ja, det gjør det. At $[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A$ er det samme som å si at

$$[Sp]_{\mathcal{B}} = A[p]_{\mathcal{B}} \quad \forall p \in \mathcal{P}_3.$$

Vi kan nå *definere* S til å være lineærabildningen med nettopp denne egenskapen: For $p \in \mathcal{P}_3$ definerer vi

$$Sp := \beta_0 p_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2,$$

der

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = A[p]_{\mathcal{B}}.$$

(f) T er en lineærabildning fra et endeligdimensjonalt vektorrom til et annet. Av det vi har bevist i MAT1125, er da T automatisk kontinuert.

(g) Vi har vist i MAT1125 at en lineærabildning er kontinuert hvis og bare hvis det finnes en konstant $C > 0$ slik at $\|Tf\| \leq C\|f\|$ for alle $f \in U$. Setter vi inn for T får vi da

$$\left\| \frac{dp}{dt} \right\|_{\sup} \leq C\|p\|_{\sup} \quad \forall p \in \mathcal{P}_3.$$

Løsning på oppgave 8.

(a) Vi har

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu \rangle = \langle u, T^*Tu \rangle = \langle u, TT^*u \rangle = \langle T^*u, T^*u \rangle = \|T^*u\|^2.$$

Tar vi kvadratrøtter på begge sider, får vi den ønskede likheten.

(b) Ja, det samme er sant for både selvadjungerte og unitære operatore, fordi slike operatore automatisk er normale. Om T er selvadjungert, er $T^* = T$, så $T^*T = TT = TT^*$. Om T er unitær er $T^* = T^{-1}$, så $T^*T = T^{-1}T = \text{id} = TT^{-1} = TT^*$.

Løsning på oppgave 9. Vi må sjekke følgende betingelser:

Positivitet: For alle $p \in \mathcal{P}_n$ må $\langle p, p \rangle \geq 0$, og $\langle p, p \rangle = 0$ kun når $p = 0$. Fra definisjonen får vi

$$\langle p, p \rangle = \int_0^1 p(t)^2(1+t) dt,$$

som aldri er negativt, siden integranden er ikke-negativ. Dersom $\langle p, p \rangle = 0$, må $p(t)^2(1+t) = 0$ for alle $t \in [0, 1]$, for den eneste ikke-negative funksjonen med integral lik 0, er nullfunksjonen. Men $1+t \geq 1$ for alle t , så da må $p(t)^2 = 0$ for alle t , og dermed $p = 0$.

Additivitet: For alle $p, q, r \in \mathcal{P}_n$ må $\langle p+q, r \rangle = \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle$. Vi får

$$\begin{aligned} \langle p+q, r \rangle &= \int_0^1 (p(t) + q(t))r(t)(1+t) dt \\ &= \int_0^1 p(t)r(t)(1+t) + q(t)r(t)(1+t) dt \\ &= \int_0^1 p(t)r(t)(1+t) dt + \int_0^1 q(t)r(t)(1+t) dt \\ &= \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle. \end{aligned}$$

Homogenitet: For alle $p, q \in \mathcal{P}_n$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ må $\langle \alpha p, q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle$. Vi får

$$\langle \alpha p, q \rangle = \int_0^1 \alpha p(t)q(t)(1+t) dt = \alpha \int_0^1 p(t)q(t)(1+t) dt = \alpha \langle p, q \rangle.$$

Symmetri: For alle $p, q \in \mathcal{P}_n$ må $\langle p, q \rangle = \overline{\langle q, p \rangle}$; siden indreproduktet er reelt, er sistnevnte lik $\langle q, p \rangle$, så vi må vise at $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$. Vi får

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)(1+t) dt = \int_0^1 q(t)p(t)(1+t) dt = \langle q, p \rangle.$$

Løsning på oppgave 10. Som i hintet starter vi med uttrykket $\lambda \|v\|^2$, der v er en egenvektor til λ :

$$\begin{aligned} \lambda \|v\|^2 &= \lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, T^*v \rangle \\ &= \langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2. \end{aligned}$$

Siden v er en egenvektor, er den ulik 0, så vi kan dele på $\|v\|^2$ på begge sider og få $\lambda = \bar{\lambda}$. Altså er λ et reelt tall.

Løsning på oppgave 12.

(a) La $u \in U$ og $\varepsilon > 0$. Siden f og g er kontinuerlige, finnes $\delta_1 > 0$ og $\delta_2 > 0$ slik at

$$\begin{aligned} \|u - v\|_U < \delta_1 &\Rightarrow \|f(u) - f(v)\|_V < \varepsilon, \\ \|u - v\|_U < \delta_2 &\Rightarrow \|g(u) - g(v)\|_V < \varepsilon. \end{aligned}$$

La $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. Da er $\delta > 0$, og $\|u - v\|_U < \delta$ impliserer både $\|u - v\|_U < \delta_1$ og $\|u - v\|_U < \delta_2$, så dersom $\|u - v\|_U < \delta$, er

$$\begin{aligned} \|(f + g)(u) - (f + g)(v)\|_V &= \|(f(u) - f(v)) + (g(u) - g(v))\|_V \\ &\leq \|f(u) - f(v)\|_V + \|g(u) - g(v)\|_V < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Altså er $f + g$ kontinuerlig.

(b) La $\alpha \in \mathbb{R}$, la $u \in U$ og la $\varepsilon > 0$. La $\delta > 0$ være slik at $\|u - v\|_U < \delta$ impliserer $\|f(u) - f(v)\|_V < \varepsilon$. Da er

$$\|(\alpha f)(u) - (\alpha f)(v)\|_V = \|\alpha(f(u) - f(v))\|_V = |\alpha| \|f(u) - f(v)\|_V \leq |\alpha| \varepsilon,$$

så αf er kontinuerlig.

(c) Vi har vist at $C(U, V)$ er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon. Resten av beviset følger som for alle andre funksjonsrom: Nullvektoren er nullfunksjonen, addisjon og skalarmultiplikasjon gjøres punktvis, den additive inversen er funksjonen $(-f)(u) := -(f(u))$, og så videre.

Løsning på oppgave 13.

(a) Vi har

$$A^*A = A^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}.$$

Denne matrisen har karakteristisk polynom

$$p(\lambda) = (3 - \lambda)(7 - \lambda) - 12 = \lambda^2 - 10\lambda + 9,$$

som har røtter $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$. Singulærverdiene til A er altså $\sigma_1 = \sqrt{9} = 3$ og $\lambda_2 = 1$. Egenvektorene tilhørende λ_1 og λ_2 må oppfylle

$$A^*A\tilde{u}_1 = 9\tilde{u}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \tilde{u}_1 = 0,$$

som er tilfellet om for eksempel $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. På samme måte får vi at $\tilde{u}_2$ må oppfylle

$$\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} \tilde{u}_2 = 0,$$

som bl.a. har løsning $\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$. Normaliserer vi disse får vi

$$u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Siden vi har to positive egenverdier σ_1, σ_2 kan vi definere v_1, v_2 direkte som

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Altså blir singulærverdidekomposisjonen av A

$$A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}}$$

(som er det samme som den reduserte SVDen av A). Siden A ikke har 0 som singulærverdi, er $\dim \ker A = 0$, og siden A har to positive singulærverdier, er $\dim \operatorname{im} A = 2$. Operatornormen er lik største singulærverdi, så $\|A\|_{\mathcal{L}} = 3$. Kondisjonstallet er lik største singulærverdi delt på minste singulærverdi, så $\kappa(A) = 3/1 = 3$.

(d) Vi har

$$A^*A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}.$$

Denne matrisen har karakteristisk polynom

$$p(\lambda) := \det(A^*A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 100\lambda + 900,$$

som har røtter $\lambda_1 = 90$ og $\lambda_2 = 10$. Dermed har A singularverdier $\sigma_1 = 3\sqrt{10}$ og $\sigma_2 = \sqrt{10}$. Vi finner så egenvektorene til A^*A :

$$A^*A\tilde{u}_1 = 90\tilde{u}_1 \iff \begin{pmatrix} -16 & 32 \\ 32 & -64 \end{pmatrix} \tilde{u}_1 = 0,$$

som har løsning $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Videre får vi

$$A^*A\tilde{u}_2 = 10\tilde{u}_2 \iff \begin{pmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{pmatrix} \tilde{u}_2 = 0,$$

som har løsning $\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Normaliserer vi disse får vi

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Siden de tilhørende singularverdiene σ_1, σ_2 er positive, kan vi definere v_1, v_2 direkte:

$$v_1 := \frac{1}{\sigma_1} Au_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \frac{1}{\sigma_2} Au_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dette gir den reduserte SVDen

$$\begin{aligned} A &= (v_1 \ v_2) \text{diag}_{2 \times 2}(\sigma_1, \sigma_2) (u_1 \ u_2)^* \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dersom vi var bedt om å finne den fulle SVDen til A , måtte vi kompletterert vektorene (v_1, v_2) med en tredje vektor v_3 slik at (v_1, v_2, v_3) var ortonormal. Ved inspeksjon ser vi at vektoren

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gjør jobben. Vi får dermed den fulle SVDen

$$\begin{aligned} A &= (v_1 \ v_2 \ v_3) \text{diag}_{3 \times 2}(\sigma_1, \sigma_2) (u_1 \ u_2)^* \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dimensjonen til kjernen til A er lik antall singularverdier som er lik 0, som er 0. Dimensjonen til bildet til A er lik antall positive singularverdier, som er 2. Operatornormen er lik største singularverdi, så $\|A\| = 3\sqrt{10}$.

Løsning på oppgave 14.

- (i) La $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 1/2$. Vi finner de tilhørende egenvektorene u_1 og u_2 til A . Vi har

$$0 = (A - \lambda_1 \cdot I_2)u_1 = \begin{pmatrix} 9/2 & 3 \\ -15/2 & -5 \end{pmatrix} u_1 \quad \Leftarrow \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

og

$$0 = (A - \lambda_2 \cdot I_2)u_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -15/2 & -9/2 \end{pmatrix} u_2 \quad \Leftarrow \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Om vi lar $R := (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, får vi $R^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. Vi får dermed diagonaliseringen

$$A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}}.$$

- (ii) Løsningen er gitt ved $x_k = A^k x_0$, som vi kan forenkle ved hjelp av diagonaliseringen:

$$\begin{aligned} x_k &= R D^k R^{-1} x_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 1/2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 3/2^k \\ -3 + 5/2^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (iii) Når $k \rightarrow \infty$ vil x_k konvergere mot $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, egenvektoren tilhørende egenverdien 1.

Løsning på oppgave 15.

- (a) Listen $\mathcal{B} := (u_1, u_2, u_3)$ har tre elementer og spenner V , så vi må vise at listen er lineært uavhengig. La $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ være slik at

$$0 = \sum_{k=1}^3 \alpha_k u_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Av første ligning er $\alpha_1 = 0$; av andre ligning er dermed $\alpha_2 = 0$; og av tredje ligning er $\alpha_3 = 0$. Dermed er listen lineært uavhengig.

- (b) Vi bruker Gram–Schmidt på $\mathcal{B}$:

$$v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|_{\ell^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}},$$

$$\tilde{v}_2 := u_2 - (u_2 \cdot v_1)v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

$$v_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|_{\ell^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_3 &:= u_3 - (u_3 \cdot v_1)v_1 - (u_3 \cdot v_2)v_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$v_3 := \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|_{\ell^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gram–Schmidt-prosedyren garanterer at den nye listen er ortonormal og har samme spenn som den opprinnelige. Altså er (v_1, v_2, v_3) en ortonormal basis for V .

Løsning på oppgave 16.

(a) Vi har $f(t) = e^{-t}$ for $t \in (-\pi, 0)$ og $f(t) = e^t$ for $t \in (0, \pi)$, så

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{e_k(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^{-t} e^{-ikt} dt + \int_0^{\pi} e^t e^{-ikt} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^{-t(1+ik)} dt + \int_0^{\pi} e^{t(1-ik)} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - e^{-(\pi)(1+ik)}}{-(1+ik)} + \frac{e^{\pi(1-ik)} - 1}{1-ik} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{\pi} e^{i\pi k} - 1}{1+ik} + \frac{e^{\pi} e^{-i\pi k} - 1}{1-ik} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{1+ik} + \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{1-ik} \right). \end{aligned}$$

Om ønskelig kan dette forenkles videre til

$$\hat{f}_k = \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{\pi(1+k^2)}.$$

Dermed er fourierrekken til f

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{\pi(1 + k^2)} e^{ikt}.$$

Siden f er kontinuerlig, vil fourierrekken til f konvergere mot f i L^2 -normen.

(b) Vi påstår at g er to ganger kontinuerlig deriverbar på $\mathbb{T}$.

I intervallet $(-\pi, \pi)$ er funksjonen g en komposisjon av to ganger (egentlig uendelig mange ganger) deriverbare funksjoner, og er dermed to ganger deriverbar. Vi har

$$g'(t) = -2 \cos(t) \sin(t), \quad g''(t) = 2 \sin^2(t) - 2 \cos^2(t),$$

så i endepunktene $t = \pm\pi$ har vi

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= 1, & g'(-\pi) &= 0, & g''(-\pi) &= -2, \\ g(\pi) &= 1, & g'(\pi) &= 0, & g''(\pi) &= -2. \end{aligned}$$

Altså er g , g' og g'' også kontinuerlig i $t = \pm\pi$, så g er to ganger kontinuerlig deriverbar på hele sirkelen. Dermed oppfyller g kravet i teoremet om uniform konvergens av fourierrekken. Siden uniform konvergens impliserer L^2 -konvergens, konvergerer fourierrekken også i L^2 -norm.

Løsning på oppgave 17. Vi bruker dimensjonssatsen:

$$\dim \operatorname{im} T + \dim \ker T = \dim U.$$

Dersom T er injektiv, er $\dim \ker T = 0$, så $\dim \operatorname{im} T = \dim U = \dim V$. Men da må $\operatorname{im} T = V$, så T er surjektiv. Dersom T er surjektiv, er $\operatorname{im} T = V$, så $\dim \ker T = \dim U - \dim \operatorname{im} T = \dim U - \dim V = 0$, så T er injektiv.

Løsning på oppgave 18. Om $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ er et indreprodukt, vet vi spesielt at $\langle u, u \rangle_T > 0$ for alle $u \neq 0$. Altså er $\langle Tu, Tu \rangle > 0$ for alle $u \neq 0$. Siden $\langle Tu, Tu \rangle > 0$ hvis og bare hvis $Tu \neq 0$, kan vi altså slutte at $Tu \neq 0$ for alle $u \neq 0$. Altså er $\ker T = \{0\}$, som er ekvivalent med at T er injektiv.

Anta motsatt at T er injektiv. Vi har

$$\langle u, u \rangle_T = \langle Tu, Tu \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U,$$

og om $\langle u, u \rangle_T = 0$ er $\langle Tu, Tu \rangle = 0$, det vil si $Tu = 0$. Men T er injektiv, så $u = 0$. Linearitet og konjugatsymmetri beviser man som vanlig:

$$\begin{aligned} \langle \alpha u + \beta v, w \rangle_T &= \langle T(\alpha u + \beta v), Tw \rangle = \langle \alpha Tu + \beta Tv, Tw \rangle \\ &= \alpha \langle Tu, Tw \rangle + \beta \langle Tv, Tw \rangle = \langle u, w \rangle_T + \langle v, w \rangle_T, \end{aligned}$$

og

$$\langle u, v \rangle_T = \langle Tu, Tv \rangle = \overline{\langle Tv, Tu \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle_T}.$$

Løsning på oppgave 20.

(a) La $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ være den lineære avbildningen

$$T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Om (e_1, e_2, e_3, e_4) er standardbasisen i $\mathbb{R}^4$, er da

$$\begin{aligned} \operatorname{im} T &= \{Tx : x \in \mathbb{R}^4\} = T(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_4 e_4) : \alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{R} \\ &= \{\alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4 : \alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}(e_3, e_4), \end{aligned}$$

mens

$$\begin{aligned} \ker T &= \{x \in \mathbb{R}^4 : Tx = 0\} \\ &= \{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_4 e_4 : \alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{R} \text{ og } \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4 = 0\} \\ &= \{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_4 e_4 : \alpha_1, \alpha_2 = 0 \text{ og } \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_4 e_4 : \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}(e_3, e_4). \end{aligned}$$

Altså er $\operatorname{im} T = \ker T$.

(b) Om $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ er slik at $\ker T = \operatorname{im} T$, får vi av dimensjonssatsen at

$$5 = \dim \mathbb{R}^5 = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = 2 \dim \operatorname{im} T.$$

Venstre side er et oddetall, mens høyre side er et partall – en selvmotsigelse.

Løsning på oppgave 22. Nei, de er ikke ekvivalente. Anta motsatt at de er ekvivalente; da finnes en $C > 0$ slik at $\|a\|_1 \leq C \|a\|_\infty$ for alle $a \in \ell^1(\mathbb{R})$. La $n \in \mathbb{N}$ og definer

$$a := (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ ganger}}, 0, \dots).$$

Da er $\|a\|_1 = n$ og $\|a\|_\infty = 1$, så vi får $n \leq C$. Men om vi velger $n > C$ gir dette en selvmotsigelse.

Løsning på oppgave 23.

(a) For $u, v \in E$ er

$$|f(u) - f(v)| = \left| \|u - z\| - \|v - z\| \right| \leq \|(u - z) - (v - z)\| = \|u - v\|$$

(der vi har brukt den omvendte trekantulikheten). Altså er f Lipschitz-kontinuerlig, så f er kontinuert.

(b) f er en kontinuert funksjon på en lukket, begrenset mengde i et endeligdimensjonalt normert vektorrom, så f antar et minimum i et punkt $v \in E$. Altså er $f(v) \leq f(u)$ for alle $u \in E$, som var det vi ønsket.

Løsning på oppgave 25. Siden T er selvadjungert og U er endeligdimensjonalt, sier spektralteoremet at det finnes en ortonormal basis $(u_1, \dots, u_n)$ for U slik at

$$Tu = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k \quad \forall u \in U,$$

der $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ er egenverdier for T , og $u_1, \dots, u_n$ er tilhørende egenvektorer.

Anta først at $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. For en ikke-null $u \in U$ er da

$$\begin{aligned} \langle Tu, u \rangle &= \langle \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k, u \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u, u_k \rangle \langle u_k, u \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u, u_k \rangle \overline{\langle u, u_k \rangle} = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\langle u, u_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Siden $u \neq 0$, er minst ett av tallene $\langle u, u_k \rangle$ ikke-null, la oss si ledd $k = m$, så

$$\langle Tu, u \rangle \geq \lambda_m |\langle u, u_m \rangle|^2 > 0.$$

Anta motsatt at $\langle Tu, u \rangle > 0$ for alle ikke-null $u \in U$. Lar vi $u = u_k$ for en vilkårlig k , får vi

$$0 < \langle Tu_k, u_k \rangle = \langle \lambda_k u_k, u_k \rangle = \lambda_k \|u_k\|^2.$$

Deler vi på $\|u_k\|^2$ på begge sider får vi $\lambda_k > 0$.