

Eksempler på eksamensoppgaver i MAT1125

Ulrik Skre Fjordholm

5. desember 2025

Oppgave 1. Definer det komplekse vektorrommet

$$U := \{\text{alle funksjoner } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ på formen} \\ f(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ for } \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

- (a) Forklar kort hvorfor U er et vektorrom.
- (b) Finn en basis for U .
- (c) Finn dimensjonen til U .

Oppgave 2. La $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ være en lineær avbildning.

- (a) Definer bildet og kjernen til T .
- (b) Vi lar nå T være gitt ved matrise-vektor-multiplikasjonen

$$T(x) := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Vis at $\text{im } T$ er utspent av de første to kolonnene i matrisen ovenfor.

- (c) Finn dimensjonen til kjernen og bildet til T .

Oppgave 3.

- (a) Definer hva det vil si at en liste av vektorer er lineært uavhengig.
- (b) Definer hva det vil si at en liste av vektorer er ortogonal og ortonormal.
- (c) Vis at alle ortogonale lister er lineært uavhengige. Er det samme sant for ortonormale lister?

Oppgave 4. Vi betrakter det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^2$.

- (a) Vis at $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ er en basis for $\mathbb{R}^2$, der

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) La $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved matrise-vektor-multiplikasjonen $T(x) := Ax$ (for $x \in \mathbb{R}^2$) for en matrise $A \in M_2(\mathbb{R})$. Du får oppgitt at

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(der $\mathcal{B}$ er basisen fra oppgave (a)). Finn matrisen A .

Oppgave 5. Vi betrakter vektorrommet $\mathbb{R}^n$ med normene

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |(x)_k| \quad \text{og} \quad \|x\|_{\max} := \max_{k=1, \dots, n} |(x)_k| \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^n$$

(der $(x)_k$ er element nummer k i x).

(a) Definer hva det vil si at en følge i $\mathbb{R}^n$ konvergerer med hensyn på $\|\cdot\|_1$.

(b) Bevis (enten direkte eller ved å referere til resultater i boka) at dersom en følge i $\mathbb{R}^n$ er konvergent med hensyn på $\|\cdot\|_1$, er den også konvergent med hensyn på $\|\cdot\|_{\max}$.

Oppgave 6. La $U := C^0([0, 1], \mathbb{R})$, mengden av kontinuerlige funksjoner fra $[0, 1]$ til $\mathbb{R}$.

(a) La $\|f\|_{\sup} := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ for $f \in U$. Vis at $\|\cdot\|_{\sup}$ er en norm på U .

(b) Definer $T: U \rightarrow U$ ved $Tf := 2f$. Vis at T er veldefinert, lineær og kontinuerlig.

Oppgave 7. For en $n \in \mathbb{N}$ lar vi $\mathcal{P}_n := \{\text{alle reelle polynomer av grad høyst } n\}$. La $T: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ være gitt ved

$$Tp := \frac{dp}{dt}, \quad p \in \mathcal{P}_3.$$

(a) Forklar hvorfor T er en veldefinert, lineær avbildning fra $\mathcal{P}_3$ til $\mathcal{P}_2$. (Du må altså vise at $Tp \in \mathcal{P}_2$ for alle $p \in \mathcal{P}_3$, og at T er lineær.)

(b) Er T injektiv?

(c) Er T surjektiv?

(d) La $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$ være standardbasisene (de “kanoniske basisene”) i henholdsvis $\mathcal{P}_3$ og $\mathcal{P}_2$. Finn basisrepresentasjonsmatrisen $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

(e) La $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ være en vilkårlig reell 3×4 -matrise. Finnes det da en $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_2)$ slik at $[S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = A$?

(f) Vi utstyrer $\mathcal{P}_n$ med normen $\|p\|_{\sup} := \sup_{t \in [0, 1]} |p(t)|$. (Du trenger ikke å vise at dette er en norm på $\mathcal{P}_n$.) Bevis (enten direkte eller ved å referere til resultater i boka) at T er kontinuerlig.

(g) Bruk resultatet i oppgave (f) til å vise at det finnes et tall $C > 0$ slik at

$$\left\| \frac{dp}{dt} \right\|_{\sup} \leq C \|p\|_{\sup} \quad \forall p \in \mathcal{P}_3.$$

Oppgave 8. La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom, og la $T \in \mathcal{L}(U)$ (en lineær avbildning fra U til U).

(a) Vis at dersom T er normal, er

$$\|Tu\| = \|T^*u\| \quad \forall u \in U.$$

(b) Er det samme sant om T er selvadjungert? Hva om T er unitær?

Oppgave 9. Vi betrakter det reelle vektorrommet $\mathcal{P}_n$ definert tidligere. For $p, q \in \mathcal{P}_n$ definerer vi

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(t)q(t)(1+t) dt.$$

Vis at dette er et indreprodukt på $\mathcal{P}_n$.

Oppgave 10. La U være et indreproduktrom over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, la $T \in \mathcal{L}(U)$ være selvadjungert, og la λ være en egenverdi til T . Bevis at $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hint: Start med uttrykket $\lambda\|v\|^2$, der v er en tilhørende egenvektor.

Oppgave 11. La p_0, p_1, p_2 være funksjonene

$$p_0(t) := (t+1)^2, \quad p_1(t) := (t-1)^2, \quad p_2(t) := t^2.$$

(a) Vis at (p_0, p_1, p_2) er en basis for $\mathcal{P}_2$.

Hint: Skriv ut en lineærkombinasjon av funksjonene, og sett inn noen spesifikke verdier for t .

(b) Finn basisskiftematriksen fra standardbasisen til basisen (p_0, p_1, p_2) .

Oppgave 12. La U og V være normerte vektorrom over $\mathbb{R}$.

(a) La $f, g: U \rightarrow V$ være kontinuerlige funksjoner. Vis at funksjonen $f + g$ er kontinuerlig.

(b) La $f: U \rightarrow V$ være kontinuerlig og la $\alpha \in \mathbb{R}$. Vis at αf er kontinuerlig.

(c) Forklar hvorfor mengden $C(U, V) := \{\text{alle kontinuerlige funksjoner fra } U \text{ til } V\}$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$.

Oppgave 13. Gitt følgende matrise A , finn

- (i) den reduserte singularverdidekomposisjonen til A ,
- (ii) dimensjonen til kjernen til A ,
- (iii) dimensjonen til bildet til A ,
- (iv) operatornormen $\|A\|_{\mathcal{L}}$,
- (v) (om A er kvadratisk og inverterbar) kondisjonstallet til A .

(a) $A := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(b) $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$(c) \ A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \ A := \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(e) \ A := \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(f) \ A := \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(g) \ A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(h) \ A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(i) \ A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 14. Matrisen $A := \begin{pmatrix} 11/2 & 3 \\ -15/2 & -4 \end{pmatrix}$ har egenverdier 1 og $1/2$.

(i) Finn diagonaliseringen av A .

(ii) Finn løsningen av differensligningen $x_{k+1} = Ax_k$, $x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(iii) Hva skjer med løsningen x_k når $k \rightarrow \infty$?

Oppgave 15. La (u_1, u_2, u_3) være følgende liste av vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) La $V := \text{span}(u_1, u_2, u_3)$. Vis at V har dimensjon 3.

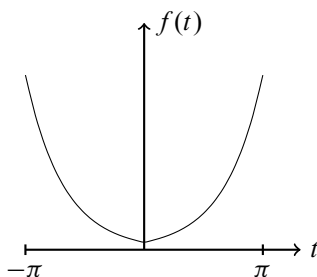
(b) Finn en ortonormal basis for V . (Her bruker vi prikkproduktet i $\mathbb{R}^4$.)

Oppgave 16.

(a) La $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen

$$f(t) := e^{|t|} \quad \text{for } t \in [-\pi, \pi).$$

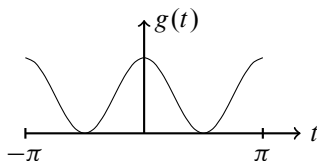
Beregn fourierrekken til f . På hvilken måte konvergerer denne fourierrekken mot f ?



(b) La $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ være funksjonen

$$g(t) := \cos^2(t) \quad \text{for } t \in [-\pi, \pi]$$

Forklar hvorfor fourierrekken til g konvergerer mot g både uniformt og i L^2 -normen.



Oppgave 17. La U og V være endeligdimensjonale, og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Vis at dersom $\dim U = \dim V$, så er T injektiv hvis og bare hvis T er surjektiv.

Oppgave 18. La U være et vektorrom med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, og la $T \in \mathcal{L}(U)$. Definer

$$\langle u, v \rangle_T := \langle Tu, Tv \rangle \quad \forall u, v \in U.$$

Bevis at $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ er et indreprodukt på U hvis og bare hvis T er injektiv.

Oppgave 19. La U være et vektorrom, og anta at $S, T \in \mathcal{L}(U)$ er slik at $\text{im } S \subseteq \ker T$. Vis at $(ST)^2 = 0$.

Oppgave 20.

(a) Gi et eksempel på $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ slik at $\text{im } T = \ker T$.

(b) Bevis at det ikke finnes $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ slik at $\text{im } T = \ker T$.

Oppgave 21. La $T \in \mathcal{L}(U, V)$, der $\dim U = 9$ og $\dim V = 7$, og anta at kjernen til T har dimensjon 2. Vis at T er surjektiv.

Oppgave 22. La $\ell^1(\mathbb{R})$ være det reelle vektorrommet

$$\ell^1(\mathbb{R}) := \{(a_1, a_2, \dots) : a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty\},$$

og definer de to normene

$$\|a\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad \|a\|_{\infty} := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$$

for $a = (a_1, a_2, \dots) \in \ell^1(\mathbb{R})$. (Du trenger ikke å vise at disse er normer på $\ell^1(\mathbb{R})$).

Er normene $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_{\infty}$ ekvivalente? Begrunn svaret ditt.

Oppgave 23. La U være et endeligdimensjonalt normert vektorrom, og la $E \subseteq U$ være en lukket, begrenset mengde. La $z \in E$.

(a) Definer $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ved $f(u) := \|u - z\|$. Bevis at f er kontinuerlig.

(b) Bevis at det finnes en $v \in E$ slik at

$$\|v - z\| \leq \|u - z\| \quad \forall u \in E.$$

Oppgave 24. La U være et vektorrom og $T \in \mathcal{L}(U)$. Vis at T er injektiv hvis og bare hvis $\lambda := 0$ ikke er en egenverdi av T .

Oppgave 25. La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{R}$, og la $T \in \mathcal{L}(U)$ være selvadjungert. Vis at de følgende utsagnene er ekvivalente:

- (i) Alle egenverdiene til T er positive
- (ii) For alle ikke-null $u \in U$ er $\langle Tu, u \rangle > 0$.

Hint: Bruk spektralteoremet.