

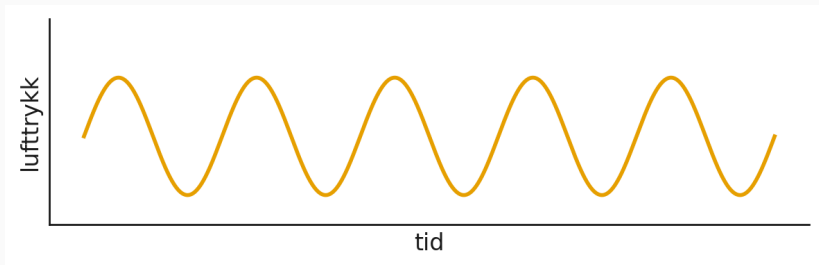
Fourier-rekker

Ulrik Enstad

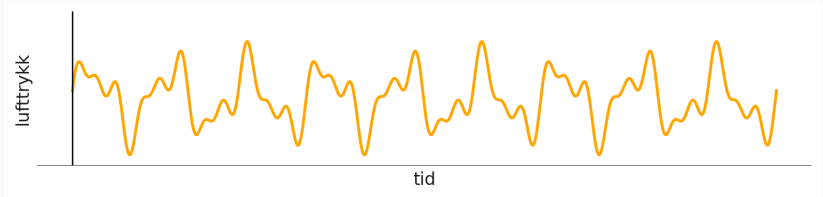
3rd December 2025

Motivasjon

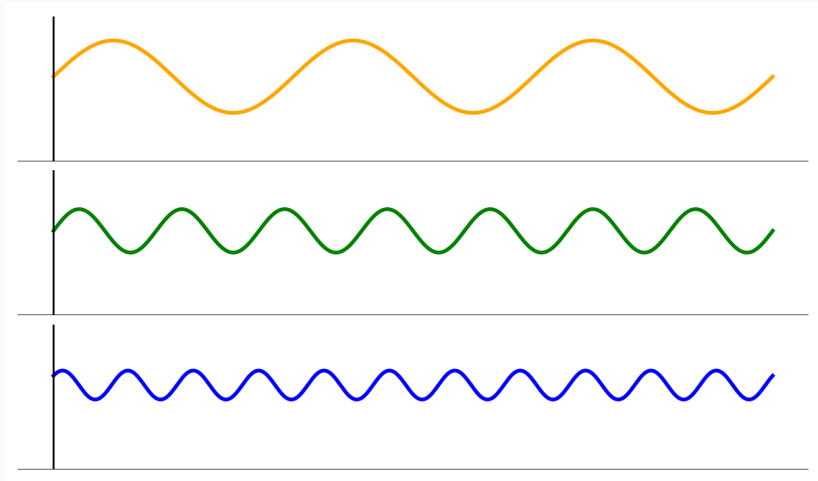
Hva er lyd?



Lyd i virkeligheten



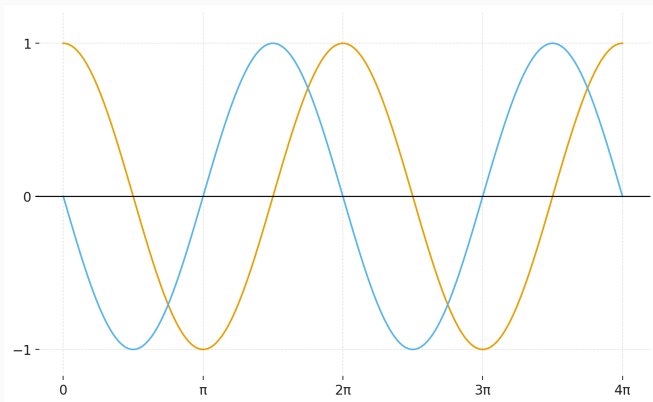
Lyd i virkeligheten



Lineær algebra

Komplekse eksponentialfunksjoner

$$e_k(t) = e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt), \quad k \in \mathbb{Z}.$$



$\operatorname{Re}(e_{-1}), \operatorname{Im}(e_{-1})$.

Vektorrom:

$$C(\mathbb{T}, \mathbb{C}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ kontinuert}, f(t + 2\pi) = f(t) \forall t\}.$$

Indreprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}).$$

Trigonometriske polynomer

Et **trigonometrisk polynom** av grad høyst n er et element av underrommet

$$V_n = \text{span}\{e_{-n}, \dots, e_0, \dots, e_n\} \subseteq C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$$

Problem

Gitt $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, hvordan kan vi tilnærme f med trigonometriske polynomer?

Nøkkelresultat

Funksjonene $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ utgjør en **ortonormal** familie, dvs.

$$\langle e_m, e_n \rangle = 0, \quad m \neq n,$$

og $\|e_n\| = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Bevis:

$$\begin{aligned}\langle e_m, e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i(m-n)} (e^{i(m-n)2\pi} - e^0) = 0. \\ \|e_n\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = \frac{1}{2\pi} (\pi - (-\pi)) = 1.\end{aligned}$$

Teorem (4.5.5, 4.5.9)

La U være et indreproduktrom og la V være et endeligdimensjonalt underrom av U .

1. Alle $u \in U$ kan skrives unikt på formen $u = v + w$ der $v \in V$ og $w \in V^\perp$.
2. Vektoren $\text{proj}_V u := v$ over har egenskapen

$$\|u - v\| \leq \|u - v'\| \text{ for alle } v' \in V.$$

3. Om $(e_1, \dots, e_n)$ er en orthonormal basis for V , så har vi

$$\text{proj}_V u = \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle e_k, \quad u \in U.$$

Tilnærming med trigonometriske polynomer

Gitt $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, så setter vi

$$S_n(f) = \text{proj}_{V_n}(f),$$

den n -te Fourier-approximasjonen av f . Da vet vi:

- $S_n(f)$ tilfredsstiller

$$\|S_n(f) - f\|_2 \leq \|g - f\|_2, \quad g \in V_n.$$

- Eksplisitt formel:

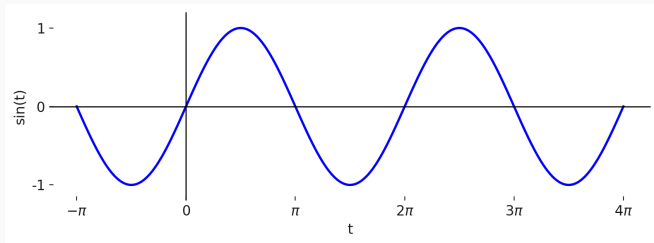
$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle e_k.$$

Fourier-koeffisienter: $\hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$

Eksempel 1

Finn Fourier-koeffisientene til

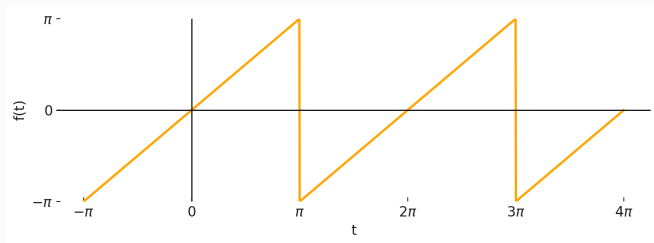
$$f(t) = \sin t.$$



Eksempel 2

Finn Fourier-koeffisientene til

$$f(t) = t, \quad -\pi < t \leq \pi.$$



Analyse

Problem

Gitt $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, i hvilken forstand (om noen) kan vi si at $S_n(f) \rightarrow f$ når $n \rightarrow \infty$?

Med en passende form for konvergens kan vi gi formelt uttrykke f ved sin **Fourier-rekke**:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}.$$

En følge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ konvergerer i L^2 -normen mot $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ dersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Teorem

La $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Da konvergerer $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ mot f i L^2 -normen.

Uniform konvergens

En følge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ **konvergerer uniformt** mot $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ dersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0.$$

Det fins funksjoner $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ slik at $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ *ikke* konvergerer uniformt mot f !

Teorem (6.5.2, 6.5.4)

La $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Anta at minst én av de to følgende holder:

1. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n| < \infty$.
2. f er to ganger kontinuerlig deriverbar.

Da konvergerer $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ uniformt mot f .

- Indreproduktrommet $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ er ikke *komplett*: Det fins følger som “burde” konvergere, men som ikke gjøre det. (MAT2400 Reell analyse)
- Kompletteringen $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ krever *målteori* for å beskrive. (MAT2400 Reell analyse + MAT3400 Lineær analyse med anvendelser)
- Mye av det dere har lært om indreproduktrom i dette kurset gjelder også for *Hilbertrom*. (MAT3400 Lineær analyse med anvendelser)