

# MAT1125 i et nøtteskall

Ulrik Skre Fjordholm

24. oktober 2025

Dette dokumentet er et forsøk på å oppsummere hele *MAT1125* over noen få sider. Siden det er umulig å komprimere hele pensum ned til noen få sider, vil det nødvendigvis være mange viktige detaljer som ikke kommer med. Ved å lese dette vil du dermed forhåpentligvis se de store linjene i emnet, men ikke nødvendigvis få med deg de viktige detaljene.

## 1 Vektorrom

**Vektorrom** er den grunnleggende byggesteinen for hele *MAT1125*. Utgangspunktet er euklidisk rom  $\mathbb{R}^n$ , som vi allerede har en haug med teori om. Ved å *abstrahere* denne teorien — trekke ut de viktigste kjennetegnene ved  $\mathbb{R}^n$  og konstruere en mer generell teori — er håpet vårt at vi får et verktøy vi ikke bare kan bruke på  $\mathbb{R}^n$ , men på mange flere mengder, slik som mengder av polynomer  $\mathcal{P}_n$ , mengden av kontinuerlige funksjoner  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , eller mengden av begrensede følger av tall  $\ell^\infty(\mathbb{R})$ . Styrken i en abstrakt teori ligger i at den kan anvendes på mange forskjellige områder.

Et vektorrom er en mengde, elementene i mengden kalles **vektorer**, og du kan addere og subtrahere vektorer, og multiplisere dem med **skalarer**. Siden det finnes viktige anvendelser der man ønsker andre skalarer enn de reelle tallene  $\mathbb{R}$ , tillater vi skalarmengden  $\mathbb{K}$  å være en vilkårlig **kropp**. I *MAT1125* kan du trygt holde deg til de to hovedeksempelene  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  og  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Gitt to vektorer  $u$  og  $v$  kan du lage nye vektorer ved å kombinere dem i **lineærkombinasjoner** — summer av multipler av vektorene. På denne måten fungerer de to vektorene som byggeklosser for et stort antall andre vektorer. **Spennet** til én eller flere vektorer er mengden av alle mulige lineærkombinasjoner av disse vektorene. Om du har  $n$  vektorer  $(u_1, \dots, u_n)$  som utspenner hele vektorrommet, vil dermed  $(u_1, \dots, u_n)$  være grunnleggende byggeklosser for vektorrommet, ved at alle vektorer kan skrives som lineærkombinasjoner av disse byggeklossene. Ideelt sett hadde denne listen vært så kort som mulig, og dette kan vi oppnå ved å kreve **lineær uavhengighet** — at alle andre vektorer kan skrives på en *unik måte* som lineærkombinasjoner av byggeklossene. Hvis dette er tilfellet, kaller vi listen en **basis**. Det viser seg at alle basiser for et vektorrom inneholder det samme antall elementer, og dette antallet er **dimensjonen** til vektorrommet. (Basiser er per definisjon endelige, og de vektorrommene som ikke har noen basis kalles **uendeligdimensjonale**.) Dimensjonen blir dermed et mål på hvor “stort” vektorrommet er, eller hvor mange “frihetsgrader” det har, eller hvor mange “retninger man kan gå” i vektorrommet.

Vi kan se på en basis  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  som et *koordinatsystem* for vektorrommet: Skalkoeffisientene til en vektor  $u$  uttrykt i basisen  $\mathcal{B}$  blir da koordinatene til  $u$  i

koordinatsystemet. Samler vi disse koordinatene i en kolonnevektor får vi  $[u]_{\mathcal{B}}$ , **basisrepresentasjonen** av  $u$  i basisen. Dermed får vi en naturlig sammenheng (en isomorfi, viser det seg) mellom det opprinnelige vektorrommet og vektorrommet  $\mathbb{K}^n$ .

## 2 Lineære avbildninger

Vektorrom har en *lineær struktur*: Du kan addere vektorer og multiplisere med skalarer. En funksjon  $T$  mellom to vektorrom er **lineær** dersom den bevarer den lineære strukturen: Om du adderer to vektorer *før* du anvender  $T$ , får du det samme som om du adderer *etter* du anvender  $T$  (så  $T(u + v) = T(u) + T(v)$ ) — og tilsvarende for skalarmultiplikasjon.

Hver lineær avbildning  $T: U \rightarrow V$  har to viktige vektorrom knyttet til seg: **kjernen** ( $\ker T$ ) og **bildet** ( $\operatorname{im} T$ ). Kjernen er et underrom av definisjonsområdet  $U$ , og bildet et underrom av verdidiområdet  $V$ . Med disse rommene kan vi bestemme om  $T$  er injektiv (da må  $\ker T = \{0\}$ ) og surjektiv (da må  $\operatorname{im} T = V$ ). Disse rommene knyttes også sammen i den helt sentrale **dimensjonssatsen**: Summen av dimensjonen av kjernen og bildet er lik dimensjonen til definisjonsområdet. Dette teoremet bruker vi gjennom hele MAT1125.

På samme måte som vi kan representere vektorer i et endeligdimensjonalt vektorrom som kolonnevektorer, kan vi representere lineære avbildninger mellom endeligdimensjonale vektorrom som en matrise, **basisrepresentasjonen** av avbildningen. Den definerende egenskapen ved denne matrisen er at funksjonsverdier  $T(u)$  representeres som en matrise-vektor-multiplikasjon mellom basisrepresentasjonene  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  og  $[u]_{\mathcal{B}}$ . Spesielt kan vi konvertere mellom basiser på samme vektorrom ved å multiplisere med **basisskiftematriksen**  $[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ .

Ved hjelp av basisrepresentasjoner kan vi “oversette” all teori for lineære avbildninger mellom endeligdimensjonale vektorrom, til teori for matriser, og *vice versa*.

## 3 Analyse på vektorrom

En **norm** gir oss mulighet til å måle størrelsen til vektorer, og dermed også avstand mellom vektorer. Normer må oppfylle helt naturlige betingelser som svarer til vår intuisjon om *størrelse*: Normen er aldri negativ; det er kun nullvektoren som har norm lik 0; normen er kompatibel med skalarmultiplikasjon, på den måten at når en vektor skaleres, vil også normen skaleres proporsjonalt; og normen av en sum er aldri større enn summen av normene (“den raskeste veien mellom to punkter er den rette linjen”).

Det første (og viktigste?) eksemplet på en norm er absoluttverdifunksjonen på  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{C}$ . Med dette som utgangspunkt kan vi generalisere begrepene *konvergens av en følge* til følger i vektorrom, og *kontinuitet av en funksjon* til funksjoner mellom vektorrom: Bare bytt ut alle absoluttverdier i definisjonene med normer. Vi kan enkelt generalisere bevis for kjente utsagn som at summen av to konvergente følger er konvergent, eller at summen eller komposisjonen av to kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig.

Kontinuitet av lineære avbildninger er helt spesielt: En lineær avbildning  $T$  er kontinuerlig hvis og bare hvis forholdet  $\|Tu\|/\|u\|$  er oppad begrenset av en konstant  $c$ . Den minste slike konstanten  $c$  kalles **operatornormen** til  $T$ , og blir dermed et mål på “størrelsen” til  $T$ .

De fleste vektorrom har flere forskjellige normer. Vi må derfor ha normen vi måler konvergens eller kontinuitet i bakhodet, for det kan hende at vi har konvergens/kon-

tinuitet med hensyn på én norm, men ikke en annen. Om de to normene derimot er **ekvivalente**, vil konvergens/kontinuitet med hensyn på den ene normen garantere kontinuitet/konvergens med hensyn på den andre. (To normer er ekvivalente dersom forholdet mellom normene aldri er større enn en øvre grense, og aldri mindre enn en nedre grense — de er “sammenlignbare”.)

Det er to hovedteoremer i dette kapitlet, og de gjelder kun for endeligdimensjonale vektorrom. For det første er alle normer på endeligdimensjonale vektorrom ekvivalente. For det andre er alle lineære avbildninger på et endeligdimensjonalt vektorrom kontinuerlige. Fra et analyseperspektiv utgjør disse egenskapene den største forskjellen mellom endeligdimensjonale og uendeligdimensjonale vektorrom.

## 4 Indreproduktrom

**Prikkproduktet** på  $\mathbb{R}^n$  (eller  $\mathbb{C}^n$ ) kan brukes til å måle lengden av vektorer; til å bestemme om to vektorer står vinkelrett på hverandre; og mer generelt, å bestemme vinkelen mellom vektorer. **Indreprodukter** er generaliseringer av prikkproduktet. De bærer med seg en haug med fine egenskaper både i teoretisk analyse og praktiske beregninger, så du bør føle deg heldig om vektorrommet ditt er utstyrt med et indreprodukt.

Et indreprodukt må oppfylle noen få aksiomer inspirert av prikkproduktet: Det må være lineært i første argument; det må være konjugatsymmetrisk; og indreproduktet mellom en vektor og seg selv er lik 0 kun dersom vektoren er nullvektoren. Som en konsekvens av disse kravene er indreprodukter konjugatlineært i andre argument.

Med hvert indreprodukt følger en norm, **normen induisert av indreproduktet**, som er definert analogt med hvordan vi definerer den euklidske normen på  $\mathbb{R}^n$  ved hjelp av prikkproduktet. To enkle, men veldig nyttige egenskaper ved akkurat denne normen er **Cauchy–Schwarz-ulikheten** og **Pythagoras’ setning**.

To vektorer er **ortogonale** om indreproduktet mellom vektorene er lik 0; mer generelt er en liste av ikke-null vektorer **ortogonal** dersom alle vektorene er ortogonale på hverandre. Slike lister er automatisk lineært uavhengige. Et spesialtilfelle er **ortonormale** lister, der vektorene i tillegg må ha norm lik 1. Slike lister, og spesielt **ortonormale basiser**, er veldig nyttige, og heldigvis finnes en algoritme for å finne slike: Ved hjelp av **Gram–Schmidt-ortogonalisering** kan vi ta en hvilken som helst basis og produsere en ortonormal basis.

Ortonormale basiser gir enkle uttrykk for basisrepresentasjonen av vektorer og lineære avbildninger. De gir oss også et enkelt (og nært beslektet) uttrykk for **ortogonal-projeksjonen** på et underrom — den lineære avbildningen som sender en vektor  $u$  ned på den vektoren i underrommet som ligger nærmest  $u$ .

Den **transponerte** av en matrise er den nye matrisen du får ved å lese av radene som kolonner, eller kolonner som rader. Indreprodukter gjør oss i stand til å “oversette” transponering til lineære avbildninger. Den **adjungerte** til en lineær operator  $T: U \rightarrow V$  er en ny lineær operator  $T^*: V \rightarrow U$  med den egenskapen at

$$\langle Tu, v \rangle_V = \langle u, T^*v \rangle_U \quad \text{for alle } u \in U \text{ og } v \in V$$

(eller ekvivalent,  $\langle v, Tu \rangle_V = \langle T^*v, u \rangle_U$ ). Den adjungerte eksisterer alltid om  $U$  og  $V$  er endeligdimensjonale, og basisrepresentasjonen til den adjungerte er bare den transponerte (eller den konjugerttransponerte, om rommet er komplekst) av basisrepresentasjonen av  $T$ . Vi kan sette forskjellige krav på  $T$  som knytter sammen  $T$  og dens adjungerte: Avbildningen er **normal** om  $T^*T = TT^*$ , **selvadjungert** om  $T^* = T$ , og

**unitær** om  $T^* = T^{-1}$ . Selv om disse kravene virker kryptiske og arbitrære, fører de med seg mange veldig nyttige egenskaper som vi får bruk for i Kapittel 5.

Til slutt i kapittelet ser vi på to typer *faktoriseringer* av matriser: **LU-faktorisering** og **QR-faktorisering**. Førstnevnte kan anvendes til raskt å løse lineære ligningssystemer, mens sistnevnte har anvendelser i å løse *underbestemte* og *overbestemte* ligningssystemer.

## 5 Spektralteori

*Spektralteori* er teorien om **egenverdier** og **egenvektorer** til kvadratiske matriser, og mer generelt, til lineære operatorer (altså lineære avbildninger fra et vektorrom inn i samme vektorrom). Et egenverdi/egenvektor-par til  $T$  (eller kort **egenpar**) er et par  $(\lambda, v)$  bestående av en skalar  $\lambda$  og en *ikke-null* vektor  $v$  slik at

$$Tv = \lambda v.$$

Dette er det samme som å si at  $v$  ligger i  $\ker(T - \lambda \text{id})$ , **egenrommet** til  $\lambda$ . Dimensjonen til dette egenrommet — den **geometriske multiplisiteten** til  $\lambda$  — forteller oss dermed hvor mange lineært uavhengige egenvektorer som tilhører  $\lambda$ .

På endeligdimensjonale vektorrom kan vi si mye mer. Lineære operatorer på slike vektorrom tilsvarer jo kvadratiske matriser, og hvert egenpar av operatoren svarer til et egenpar av matrisen — og motsatt. Du kan dermed finne egenverdier slik du har lært før: Beregn det **karakteristiske polynomet** til  $T$ , og finn røttene (nullpunktene) til dette  $n$ -tegradspolynomet. Siden røttene til et  $n$ -tegradspolynom kan være komplekse, vil du fort ende opp med komplekse egenverdier, selv for reelle matriser. Om operatoren derimot er selvdjungert, er egenverdiene garantert reelle.

En kvadratisk matrise  $A$  er **diagonaliserbar** om den kan skrives som  $A = RDR^{-1}$  for en diagonalmatrise  $D$ . Da vil nødvendigvis diagonalelementene i  $D$  være egenverdier, og kolonnene i  $R$  være tilhørende egenvektorer. Dermed kan man se at en kvadratisk  $n \times n$ -matrise er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har  $n$  lineært uavhengige egenvektorer. Dette kan vi ta som en definisjon på hva diagonaliserbarhet betyr for lineære operatorer på  $n$ -dimensjonale vektorrom.

Diagonaliserbarhet har mange anvendelser, som springer ut fra observasjonen om at hvis  $A = RDR^{-1}$ , vil  $A^k = RD^kR^{-1}$  for enhver  $k \in \mathbb{N}$ , og at potensen  $D^k$  av en diagonalmatrise  $D$  er enkel å beregne. Dette gir enkle løsningsformler for inversmatrisen  $A^{-1}$ , for løsningen av lineære differensligninger, og for løsningen av lineære differensialligninger.

Med tanke på hvor nyttig diagonalisering er, ville det vært fint om det fantes en enkel egenskap ved operatoren/matrisen som garanterer diagonaliserbarhet. Hovedresultatet i dette kapittelet er **spektralteoremet**: Enhver normal operator er diagonaliserbar, og egenvektorene er (eller kan velges slik at de er) ortonormale. For matriser betyr dette at  $A = RDR^*$ , der  $R$  er unitær. Over kroppen  $\mathbb{R}$  sier teoremet at enhver selvdjungert operator er diagonaliserbar, og egenvektorene er ortonormale.

Diagonalisering er kun relevante for lineære *operatorer* (som for matriser betyr *kvadratiske* matriser), så teorien ovenfor kan ikke anvendes på generelle lineære avbildninger fra et vektorrom til et annet vektorrom. Det vi derimot alltid kan gjøre er **singulærverdidekomposisjon** (SVD). Enhver matrise  $A$  kan skrives som  $A = CDB^*$ , der  $B$  og  $C$  er unitære, og  $D$  er en diagonalmatrise. (Merk likheten med diagonalisering  $RDR^*$  av normale operatorer.) For lineære avbildninger  $T: U \rightarrow V$  blir det

analoge utsagnet at  $U$  og  $V$  har ortonormale basiser  $\mathcal{B}$  og  $\mathcal{C}$  slik at  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  er en diagonalmatrise.

SVD har mange nyttige anvendelser: De kan brukes til å beregne operatornormen av en matrise; til å beregne **kondisjonstall** (et mål på sensitivitet overfor små feil i ligningssystem); til å løse underbestemte og overbestemte ligningssystemer; og til komprimering, slik som **lavrangsapprosimasjon** og bildekomprimering.

## 6 Fourieranalyse

Det sentrale spørsmålet i dette siste kapittelet er: Om  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  er en  $2\pi$ -periodisk funksjon (det vil si  $f(t + 2\pi) = f(t)$  for alle  $t \in \mathbb{R}$ ), kan vi da uttrykke  $f$  som en **fourierrekke**

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kt) + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos(kt)$$

for koeffisienter  $c_k, d_k$ ? Ved hjelp av Eulers formel kan vi skrive om dette uttrykket til

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt}$$

for koeffisienter  $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$  (**fourierkoeffisientene**). Ved å observere at funksjonene  $e^{ikt}$  er ortonormale med hensyn på  $L^2$ -indreproduktet, finner vi et enkelt uttrykk for fourierkoeffisientene som indreproduktet mellom disse funksjonene og  $f$ .

Den “uendelige summen” ovenfor må tolkes som en rekke, og spørsmålet blir derfor om rekken konvergerer, i hvilken norm den konvergerer, og om grensen er lik  $f$ . “Konvergens av rekken” betyr at om  $S_N(f)$  er *delsummen*

$$S_N(f)(t) := \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikt},$$

vil  $S_N(f)$  konvergere når  $N \rightarrow \infty$ .

Lineærkombinasjoner av funksjonene  $e^{-iNt}, \dots, e^{iNt}$  (slik som  $S_N(f)$  er) kalles **trigonometriske polynomer**. Vi observerer nå at  $S_N(f)$  er projeksjonen (med hensyn på  $L^2$ -indreproduktet) av  $f$  ned på underrommet av  $N$ -teordens trigonometriske polynomer. Delsummen  $S_N(f)$  er dermed den funksjonen i dette underrommet som ligger nærmest  $f$ . Resten av beviset går nå ut på å vise at det finnes en eller annen følge av trigonometriske polynomer  $f_1, f_2, \dots$  som faktisk konvergerer mot  $f$  i  $L^2$ -normen. Siden  $S_N(f)$  ligger nærmere  $f$  enn det  $f_N$  gjør, vil dermed også  $S_N(f)$  konvergere mot  $f$ .

Til slutt i kapittelet finner vi noen betingelser på  $f$  som gjør at vi kan “forbedre” normen som fourierrekken konvergerer i. Konklusjonen er at om  $f$  er “glatt nok” (spesifikt to ganger kontinuerlig deriverbar), vil fourierrekken konvergere *uniformt* mot  $f$ .